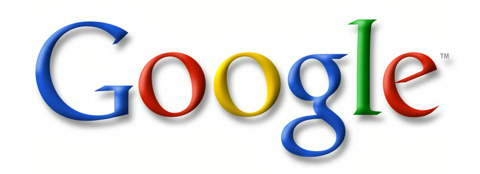


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

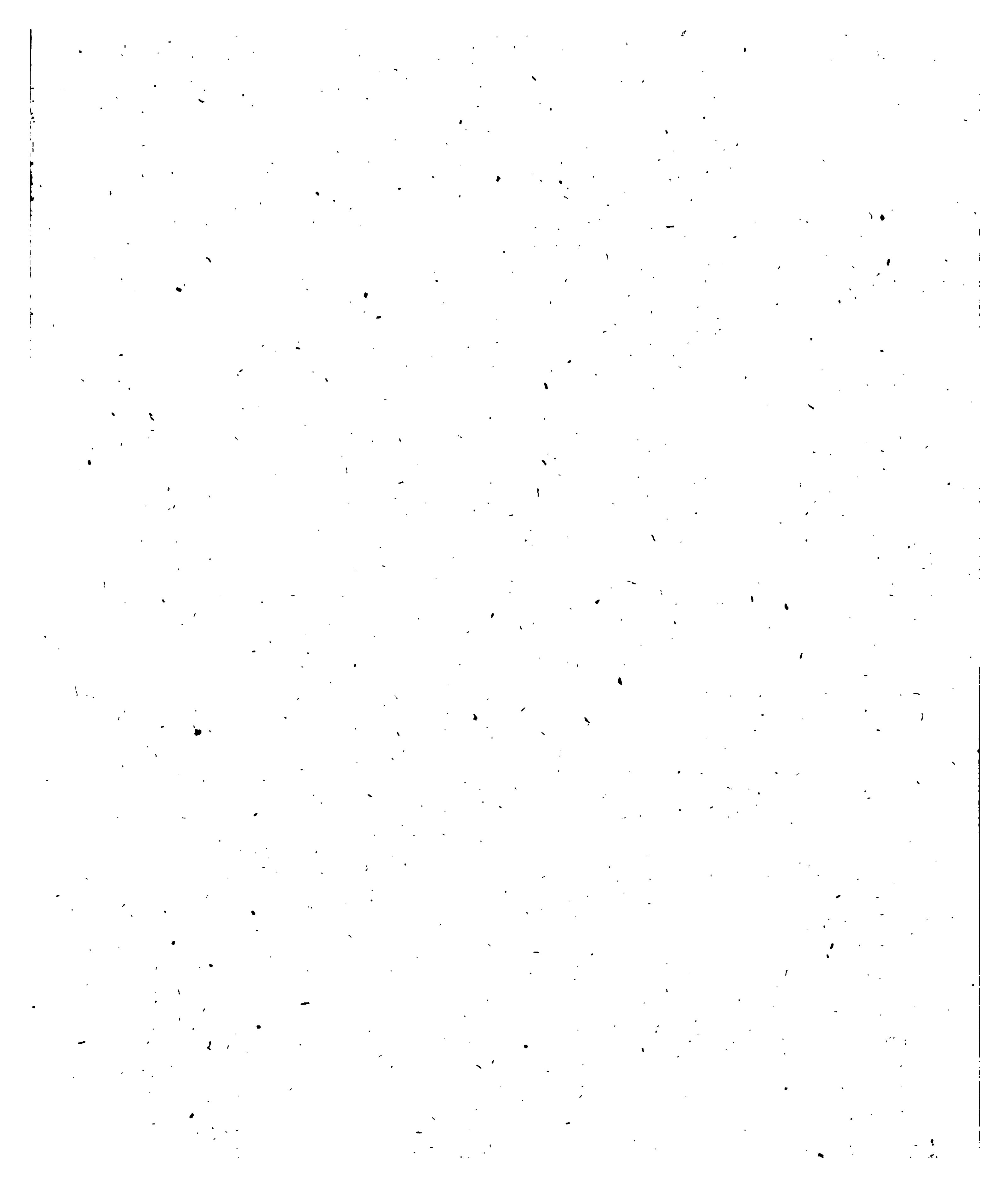
Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

32-27.19.

Math 8138.27



SCIENCE CENTER LIBRARY



Grundriß

zu

analytischen Untersuchungen

der

dreieckigen Pyramide.

Von

Dr. Karl Wilhelm Feuerbach,

Professor der Mathematik.

Nürnberg, 1827.

In Commission bei Riegel und Wießner.

Math 8138.27

1851 Dec 2

Haven Fund

Jacob Liegts 328

Druck und Papier von J. A. Brügel in Ansbach.

Vorwort.

In diesen Bogen habe ich einige der vorzüglichsten Resultate meiner, über die dreieckige Pyramide geführten, Untersuchungen gesammelt. Sie sind aus einem größeren, bereits im Manuscript vollendeten, Werke ausgezogen, welches ich schon im Jahr 1826 in Okens Isis, VI. Heft, S. 565 unter dem Titel: Analysis der dreieckigen Pyramide angekündigt habe. Da die Herausgabe dieses Werkes bis jetzt noch Hindernissen unterliegt, seine Ergebnisse aber, meines Erachtens, von nicht geringem Interesse sein dürften, so glaube ich, keiner unverdienstlichen Arbeit mich unterzogen zu haben, vor der Hand diesen Auszug zu liefern. Dem Zwecke dieses Schriftchens gemäß, sind die Beweise der hier mitgetheilten, von mir aufgefundenen, Säze größtentheils unterdrückt oder nur angedeutet worden. Derjenige Leser, welcher mit der analytischen Geometrie der Neueren vertraut ist, wird ohne Zweifel im Stande sein, sich die Wege zu denselben selbst zu bahnen und hiernach den wissenschaftlichen Werth jenes größeren Werkes vorläufig zu beurtheilen.

Ansbach, den 22. October 1827.

Dr. K. W. Feuerbach.

Verbesserungen.

Seite 1, oben ist der Titel **Einleitung** vorzusezen.
" 1, Zeile 2 v. u. lies nicht **blos**.
" 7, " 9 v. u. lies $-b, -d$ statt b, d.
" 16, " 12 v. o. lies $-b, -d$ statt $+b, +d$.
" 29, " 1 v. u. lies nicht das Zeichen $=$.
" 40, " 4 v. u. lies $pp'' : DB$ statt $p' : DB$.

Die dreieckige Pyramide behauptet bekanntlich unter allen von ebenen Seitenflächen eingeschlossenen körperlichen Figuren, als der einfachste und elementare Körper, den nämlichen ausgezeichneten Rang, welchen das Dreieck in der Ebene unter allen geradlinigen Figuren besitzt. Denn, gleichwie man sich diese als aus lauter Dreiecken zusammengesetzt, vorstellen kann; so können auch eben so alle Polyeder durch gehörige Verbindung dreieckiger Pyramiden gebildet werden. Ferner, gleichwie in der Ebene drei Punkte und ihre drei Abstände von einander die Lage und alle Stücke eines geradlinigen Dreiecks bestimmen; so bestimmen im Raume vier Punkte und ihre sechs Abstände von einander die Lage und alle Dimensionen einer dreieckigen Pyramide. Sind daher irgend sechs, von einander unabhängige, Stücke dieser Pyramide durch ihre Kanten ausgedrückt, so wird man auch umgekehrt, mit Hülfe dieser sechs Gleichungen, die Werthe der sechs Kanten, und somit aller Dimensionen der Pyramide, aus jenen sechs Stücken zu berechnen im Stande sein; worauf man das, dem Probleme der ebenen Trigonometrie analoge Problem im Raume begründen kann: Aus sechs, von einander unabhängigen, Stücken der Pyramide (deren 44 an der Figur unmittelbar sich befinden, nämlich vier Seitenflächen mit ihren sechs Winkeln, sechs Kanten mit ihren fünfzehn Winkeln, zwölf Winkel, welche die Kanten mit den Seitenflächen bilden, und der körperliche Inhalt der Pyramide) die übrigen zu berechnen.

Die allgemeine, alle möglichen Fälle umfassende, Auflösung dieses Problems, welches seiner, vorzüglich praktischen, Wichtigkeit wegen, den Titel einer besondern Disciplin, etwa der Tetraedrometrie, sich zueignen wird, ist bis jetzt noch nicht geleistet worden. Beiträge hiezu haben blos Euler durch die Abhandlung Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida Hedris planis inclusa

sunt praedita (Nov. Comment. Acad. Petr. 1758), de Gua in seinen Propositions neuves, et non moins utiles que curieuses, sur le Tetraede, ou essai de Tetraedrometrie (Histoire de l'Acad. roy. an. 1783), la Grange in der berühmten Abhandlung: Solutions analytiques de quelques problémes sur les Pyramides triangulaires. (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1755. §. 30), l'Hulier, Legendre u. a. geliefert. Den ersten Versuch, dieses Problem in seiner Allgemeinheit zu behandeln, hat Carnot durch mehre, in seiner Géometrie de position zerstreuten Sätze, und vorzüglich in seinem Mémoire sur la rélation, qui existe entre les distances réspectives de cinq points pris dans l'espace, Paris 1806 unternommen, wo er aber den Wunsch äußerte, dasselbe einer sorgfältigeren Bearbeitung gewürdiget zu sehen, indem er sich größtentheils damit begnügte, die Fragen auf Gleichungen zu bringen, ohne sie selbst aufzulösen, oder die Möglichkeit ihrer Auflösung jedesmal gehörig vorzubereiten. So ist man z. B. in der 5ten Aufgabe: Aus sechs der sieben Größen, nämlich der sechs Kanten und des Halbmessers der in die Pyramide beschriebenen Kugel, die siebente zu finden, durch Aufstellung der Gleichung: Der dreifache Inhalt der Pyramide ist gleich dem Produkte aus ihrem Umfange in dem genannten Halbmesser — welche Gleichung nach Einführung der Kanten vier Wurzelgrößen enthält — von der wahren Auflösung noch ziemlich weit entfernt. Mit gleicher Befugniß könnte das Hauptproblem des ganzen Memoirs mit der Gleichung: Die algebraische Summe der Inhalte der fünf Pyramiden, welche fünf Punkte im Raume bestimmen, ist gleich Null, schon unmittelbar nach der dritten Aufgabe, welche jene Inhalte in Werthen der zehn Abstände der fünf Punkte von einander auszudrücken lehrt, als aufgelöst betrachtet werden. Auch befindet sich in diesem Mémoire, oder in der deutschen Uebersetzung, welche Herr Schumacher dem 2ten Theile seiner Geometrie der Stellung, Altona 1810, angehängt hat, eine fehlerhafte Auflösung, nämlich der 25ten Aufgabe: Zwischen den sechs Winkeln, welche irgend drei Seitenflächen der Pyramide mit den, ihnen respektive gegenüber liegenden, Kanten und einer beliebigen geraden Linie bilden, eine Gleichung zu finden; denn die daselbst zu Grund gelegte Formel (50) ist für die Complemente dieser Winkel nicht anwendbar, weßhalb auch die für sie aufgestellte Relation ungiltig ist, und keine Probe besteht. Legt man z. B. die Transversale in eine der Kanten f, g, h, so werden

von dem Sinus der Winkel s, q, r, zwei gleich Null, hingegen der dritte gleich dem Sinus eines der Winkel m, n, p, zwischen welchen drei Winkeln sich alsdann aus jener Relation eine nicht identische Gleichung ergäbe, durch welche man aus zweien dieser Winkel den dritten finden könnte, was unmöglich ist. — Dagegen finden folgende zwei Aufgaben hier ihre Stelle, nämlich:

A. Zwischen den drei Winkeln, welche irgend drei Seitenflächen, oder auch die ihnen gegenüber liegenden Kanten der Pyramide mit einander bilden, und denjenigen drei Winkeln, welche eine beliebige Ebene oder gerade Linie mit jenen drei Ebenen bilden, eine Gleichung zu finden.

B. Zwischen den drei Winkeln, welche irgend drei Seitenflächen, oder auch die ihnen gegenüber liegenden Kanten der Pyramide mit einander bilden, und denjenigen drei Winkeln, welche eine beliebige Ebene oder gerade Linie mit diesen drei Kanten bildet, eine Gleichung zu finden.

Es seien nämlich die Winkel, welche die Seitenflächen DBC, DAC, DAB der beliebigen dreieckigen Pyramide DABC mit einander bilden, durch a, b, c; und die Winkel, welche die Kanten DA, DB, DC mit einander bilden, durch α, β, γ in gehöriger Ordnung bezeichnet, ferner

$$1 - \cos a^2 - \cos b^2 - \cos c^2 - 2 \cos a \cos b \cos c = \mathfrak{d}^2$$
$$1 - \cos \alpha^2 - \cos \beta^2 - \cos \gamma^2 + 2 \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma = \delta^2$$

gesetzt; so geschieht den in A. enthaltenen Aufgaben durch die beiden Gleichungen:

$$\mathfrak{d}^2 = \begin{Bmatrix} m^2 \sin a^2 - 2\,np\,(\cos b \cos c + \cos a) \\ n^2 \sin b^2 + 2\,mp\,(\cos a \cos c + \cos b) \\ p^2 \sin c^2 - 2\,mn\,(\cos a \cos b + \cos c) \end{Bmatrix},$$

$$\delta^2 = \begin{Bmatrix} m^2 \sin \alpha^2 - 2\,np \sin \beta \sin \gamma \cos \alpha \\ n^2 \sin \beta^2 + 2\,mp \sin \alpha \sin \gamma \cos \beta \\ p^2 \sin \gamma^2 - 2\,mn \sin \alpha \sin \beta \cos \gamma \end{Bmatrix},$$

Genüge, in deren jeder die m, n, p sowohl die Cosinus derjenigen Winkel, welche eine beliebige Ebene mit den Seitenflächen DBC, DAC, DAB bildet, als auch die Sinus derjenigen Winkel, welche eine beliebige gerade Linie mit diesen Seitenflächen bildet, vorstellen können. Die in B. enthaltenen Aufgaben aber sind durch die beiden Gleichungen

$$d^2 = \left\{\begin{matrix} m^2 \sin a^2 - 2\, np \sin b \sin c \cos a \\ n^2 \sin b^2 - 2\, mp \sin a \sin c \cos b \\ p^2 \sin c^2 - 2\, mn \sin a \sin b \cos c \end{matrix}\right\},$$

$$\delta^2 = \left\{\begin{matrix} m^2 \sin \alpha^2 + 2\, np\, (\cos\beta \cos\gamma - \cos\alpha) \\ n^2 \sin \beta^2 + 2\, mp\, (\cos\alpha \cos\gamma - \cos\beta) \\ p^2 \sin \gamma^2 + 2\, mn\, (\cos\alpha \cos\beta - \cos\gamma) \end{matrix}\right\}$$

aufgelöst, in deren jeder die m, n, p sowohl die Cosinus derjenigen Winkel, welche eine beliebige gerade Linie mit den Kanten DA, DB, DC bildet, als auch die Sinus derjenigen Winkel, welche eine beliebige Ebene mit diesen Kanten bildet, vorstellen können.

Die übrigen, im angeführten Mémoire von § 47. bis § 54. abgehandelten Aufgaben sind sämmtlich mit der allgemeinern aufgelöst: Zwischen den sechs Winkeln, welche irgend vier Raumgrößen, deren jede eine Ebene oder gerade Linie sein kann, mit einander bilden, eine Gleichung zu finden. Da nämlich sowohl der Cosinus des Winkels, welchen zwei Ebenen oder zwei gerade Linien mit einander bilden, als auch der Sinus des Winkels, welchen eine Ebene mit einer geraden Linie bildet, in die Form $(1 + nN + pP) : \sqrt{(1 + n^2 + p^2)(1 + N^2 + P^2)}$ gebracht werden kann, wo die n, p, N, P durch die Gleichungen der Ebenen und geraden Linien gegebene Ausdrücke vorstellen; so hat man hierbei jedesmal sechs Gleichungen dieser Form:

$$\left.\begin{matrix} 1 + xx' + yy' = zz'\, m \\ 1 + xx'' + yy'' = zz''\, n \\ 1 + xx''' + yy''' = zz'''\, p \end{matrix}\right\} (1) \qquad \left.\begin{matrix} 1 + x''x''' + y''y''' = z''z'''\, m' \\ 1 + x'x''' + y'y''' = z'z'''\, n' \\ 1 + x'x'' + y'y'' = z'z''\, p' \end{matrix}\right\} (2)$$

wo $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$, $z' = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2}$, $z'' = \sqrt{1 + x''^2 + y''^2}$, $z''' = \sqrt{1 + x'''^2 + y'''^2}$ gesetzt ist, die m, n, p Sinus oder Cosinus der vorliegenden Winkel, und die x, y aus den Gleichungen der zugehörigen Dimensionen bestimmte Ausdrücke vorstellen. Dividirt man nun irgend eine der Gleichungen (1) durch jede der beiden übrigen, sucht aus den also entstandenen Gleichungen die Werthe der x, y durch die übrigen in ihnen vorkommenden Größen x', x'', x''', y', y'', y''', z', z'', z''', m, n, p und substituirt dieselben in irgend eine eben dieser Gleichungen (1); so ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (2) und folgenden für die beliebigen Größen x, y, z, x', y', z', x'', y'', z'' gültigen Relationen

$$(xy' + x'y)^2 + (xz' - x'z)^2 + (yz' - y'z)^2 = rr' - \alpha,$$

$$(xy' - x'y)(x''y''' - x'''y'') + (xz' - x'z)(x''z''' - x'''z'') + (yz' - y'z)(y''z''' - y'''z'')$$
$$= \beta\beta' - \gamma\gamma',$$

$$(xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z)^2 = rr'r'' - r\gamma'^2 - r'\beta^2 - r''\alpha^2 + 2\alpha\beta\gamma',$$

in welchen $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $r'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$, $r''^2 = x''^2 + y''^2 + z''^2$, und $xx' + yy' + zz' = \alpha$, $xx'' + yy'' + zz'' = \beta$, $xx''' + yy''' + zz''' = \gamma$ $x'x''' + y'y''' + z'z''' = \beta'$, $x'x'' + y'y'' + z'z'' = \gamma'$ ist, die verlangte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{r} 1 - m^2 - m'^2 + m^2m'^2 - 2npn'p' + 2m'np \\ - n^2 - n'^2 + n^2n'^2 - 2mpm'p' + 2mn'p \\ - p^2 - p'^2 + p^2p'^2 - 2mnm'n' + 2mnp' \\ + 2m'n'p' \end{array}\right\} = 0$$

Was die Untersuchung rein geometrischer Eigenschaften der Pyramiden betrifft, so hat uns *la Grange* in oben erwähnter Abhandlung ein weites Feld eröffnet, insbesondere durch die daselbst vorkommende, aber bis jetzt noch nicht gehörig beachtet gewesene Auflösung der Aufgabe: *Die Lage eines Punktes aus seinen Abständen von irgend drei Seitenflächen der Pyramide zu bestimmen.* Sie führt zu einem Satz, welcher als besonderer Fall in dem nunmehr bekannten allgemeineren enthalten ist: *Wenn man den Abstand jedes von fünf beliebigen Punkten im Raume von einer beliebigen Ebene in den Inhalt derjenigen Pyramide multiplicirt, welche die vier übrigen Punkte bestimmen; so ist die algebraische Summe dieser fünf Producte gleich Null.*

Es seien nämlich a, b, c, d, e die Abstände einer beliebigen Ebene von fünf beliebigen Punkten A, B, C, D, E außerhalb derselben und α, β, γ, δ, ε die körperlichen Inhalte der dreieckigen Pyramiden $BCDE$, $ACDE$, $ABDE$, $ABCE$, $ABCD$; so ist $\varepsilon = \alpha + \beta + \gamma + \delta$, und $e\varepsilon = a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta$, welche Gleichungen zunächst für die Lage des Punktes E innerhalb der Pyramide $ABCD$ gelten. Sezt man aber in diesen Gleichungen jedes, dann je zwei und auch je drei der α, β, γ, δ negativ; so kommt der Punkt E nach und nach in jeden derjenigen vierzehn Räume außerhalb der Pyramide $ABCD$ zu liegen, welche Ausdehnungen ihrer vier Seitenflächen mit einander bestimmen. Sezt man dagegen in eben diesen Gleichungen jedes, dann je zwei, und auch je drei der α, β, γ, δ gleich Null; so fällt der Punkt E nach und nach in jede der Seitenflächen der Pyramide $ABCD$, dann in jede ihrer sechs Kanten und endlich in jede ihrer vier Ecken: wobei die La-

gen des Punktes E in den Ausdehnungen der Seitenflächen und in den Verlängerungen der Kanten wieder durch gehörige Veränderung der Zeichen α, β, γ, δ angezeigt werden. — Geht jene beliebige Ebene durch einen der fünf Punkte, so hat man den besonderen Fall, zu welchen la Grange's Auflösung jener Aufgabe führt. Der Beweis dieses merkwürdigen Sazes, welchen ich im Jahre 1825 entdeckt und in Oken's Isis (s. 6tes Heft, 1826. Seite 565) als die Grundlage eines neuen Calculs, der Methode der coordinirten Coefficienten, angekündigt habe, wird durch Berechnung der Inhalte der fünf Pyramiden aus den rechtwinkligen Coordinaten ihrer Ecken sehr leicht geführt. Meines Wissens war es bis dahin unbekannt. Die Art, wie Ritter von Gauß in einem Schreiben an Schumacher, welches im Anhange zu seiner Geometrie der Stellung II. Th. abgedruckt oder benuzt ist, die Coordinaten der merkwürdigen Punkte eines ebenen Dreiecks bestimmt, läßt vermuthen, daß er auch ihm wenigstens damals unbekannt gewesen. Sind nämlich d, d′, d″ die Seiten eines ebenen Dreiecks im Raume und a, b, c; a′, b′, c′; a″, b″, c″ die rechtwinkligen Coordinaten der denselben gegenüber liegenden Spitzen, so sind die Coordinaten vom Mittelpunkte des in dasselbe beschriebenen Kreises

$$(da + d'a' + d''a'') : (d + d' + d'') \text{ auf der Axe der } x,$$
$$(db + d'b' + d''b'') : (d + d' + d'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } y,$$
$$(dc + d'c' + d''c'') : (d + d' + d'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } z,$$

aus welchen sich die Coordinaten der drei, die Seiten des Dreiecks außerhalb berührenden, Kreise ergeben, wenn man in ihnen nach und nach jede der Seiten d, d′, d″ negativ sezt. Ferner sind die Coordinaten vom Mittelpunkte des um das Dreieck beschriebenen Kreises, wenn r, r′, r″ in gehöriger Ordnung die Abstände der Fußpunkte der, aus den Spitzen des Dreiecks auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten, Perpendikel bezeichnen,

$$(ra + r'a' + r''a'') : (r + r' + r'') \text{ auf der Axe der } x,$$
$$(rb + r'b' + r''b'') : (r + r' + r'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } y,$$
$$(rc + r'c' + r''c'') : (r + r' + r'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } z,$$

und die Coordinaten vom Mittelpunkte des Kreises, welcher durch diese drei Fußpunkte geht,

$$[(r' + r'')\, a + (r + r'')\, a' + (r + r')\, a''] : 2\,(r + r' + r'') \text{ auf der Axe der } x,$$
$$[(r' + r'')\, b + (r + r'')\, b' + (r + r')\, b''] : 2\,(r + r' + r'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } y,$$
$$[(r' + r'')\, c + (r + r'')\, c' + (r + r')\, c''] : 2\,(r + r' + r'') \text{ 〃 〃 〃 〃 } z$$

Auch läßt sich aus diesem Satze weiter ableiten, daß, wenn q′, q″, q‴, . . . $q^{(n)}$

der Ordnung nach die Abstände der n beliebigen Punkte $A', A'', A''', \ldots A^{(n)}$ im Raume von einer und der nämlichen beliebigen Ebene vorstellen, alsdann immer zwei Relationen dieser Form

$$q'P' + q''P'' + q'''P''' + \ldots + q^{(n)}P^{(n)} = 0$$
$$P' + P'' + P''' + \ldots + P^{(n)} = 0$$

Statt finden müssen, wo die P von den, eben so indicirten, Punkten unabhängige, körperliche Räume bezeichnen, welche sich aus den algebraischen Summen derjenigen dreieckigen Pyramiden bilden, welche jedesmal je vier der $n - 1$ übrigen Punkte bestimmen.

Es seien nun x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; X, Y, Z der Ordnung nach die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte D, A, B, C, E und $\alpha = a\epsilon$, $\beta = b\epsilon$, $\gamma = c\epsilon$, $\delta = d\epsilon$; so sind die Coordinaten des Punktes E

$$X = ax + bx' + cx'' + dx'''$$
$$Y = ay + by' + cy'' + dy'''$$
$$Z = az + bz' + cz'' + dz'''$$

und $a + b + c + d = 1$. Diese vier Größen a, b, c, d, welche nichts anderes sind, als die Exponenten der geometrischen Verhältnisse, in welchen die Abstände der Ebenen ACD, ABD, ABC vom Punkte E und den ihnen gegenüber liegenden Ecken der Pyramide ABCD zu einander stehen, nenne ich die, den Ecken A, B, C, D zugeordneten, coordinirten Coefficienten des Punktes E. Da man aus obigen Werthen der X, Y, Z mit Hilfe der Gleichung $a + b + c + d = 1$ jede der Größen a, b, c, d eliminiren kann, so bestimmen irgend drei der vier Coefficienten eines Punktes seine Lage in Beziehung auf die Pyramide ABCD. Um dagegen umgekehrt aus jenen Coordinaten des Punktes seine vier Coefficienten zu berechnen, suche man aus obigen vier Gleichungen die Werthe der a, b, c, d, welche der Ordnung nach

$$(\xi\ X - \eta\ Y + \zeta\ Z - 3\,\mathfrak{D}) : 3\epsilon$$
$$(\xi'\ X - \eta'\ Y + \zeta'\ Z - 3\,\mathfrak{A}) : 3\epsilon$$
$$(\xi''\ X - \eta''\ Y + \zeta''\ Z - 3\,\mathfrak{B}) : 3\epsilon$$
$$(\xi'''X - \eta'''Y + \zeta'''Z - 3\,\mathfrak{C}) : 3\epsilon$$

sind, wo die ξ, η, ζ; ξ', η', ζ'; ξ'', η'', ζ''; $\xi''', \eta''', \zeta'''$ die Inhalte der Projectionen der ebenen Dreiecke ABC, DBC, DAC, DAB auf die coodinirten Ebenen (yz), (xz), (xy) und die $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ die Inhalte der Pyramiden bezeichnen, wel-

che eben jene Dreiecke zu Grundflächen, und den Ursprung des Coordinatensystems zur gemeinschaftlichen Spitze haben.

Sind übrigens die Coordinaten eines Punktes in der Form

$$\left.\begin{matrix} X \\ Y \\ Z \end{matrix}\right\} = M\left\{\begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}\right\} + N\left\{\begin{matrix} x' \\ y' \\ z' \end{matrix}\right\} + P\left\{\begin{matrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{matrix}\right\} + Q\left\{\begin{matrix} x''' \\ y''' \\ z''' \end{matrix}\right\}.$$

gegeben, wo die M, N, P, Q von den Coordinaten der Ecken der Pyramide ABCD unabhängige Zahlen vorstellen, und es ist $M + N + P + Q = 1$, so hat man aus obigen Werthen der X, Y, Z

$$(a - M)\, x + (b - N)\, x' + (c - P)\, x'' + (d - Q)\, x''' = 0.$$

Legt man nun die coordinirte Ebene der yz nach und nach in jede Seitenfläche der Pyramide ABCD, z. B. in ABC, so ist $x' = 0$, $x'' = 0$, $x''' = 0$, folglich

$$a = M, \text{ eben so } b = N, \text{ und } c = P, \text{ und } d = Q.$$

Findet hingegen die Gleichung $M + N + P + Q = 1$ nicht statt, so ist dieses ein Merkmal, daß der Punkt nicht der Pyramide angehöre, sondern von der Lage des willkührlich gewählten Coordinatensystems abhänge, und seine Coefficienten werden wieder nach obigen Formeln berechnet.

Hierauf gründe ich nun ein neues Coordinatensystem (im erweiterten Sinne des Wortes), in welchem an die Stelle der Coordinaten-Axen irgend sechs von einander unabhängige Dimensionen der Pyramide, ferner an die Stelle der drei Coordinaten eines Punktes seine drei, irgend dreien der vier Ecken A, B, C, D zugeordneten Coefficienten, und statt der Raumgrößen selbst, welche mit der Urpyramide in Beziehung gesetzt werden, die Exponenten ihrer geometrischen Verhältnisse zu gleichnamigen Dimensionen dieser treten. Substituirt man nämlich in irgend einer, durch die Coordinaten ihrer zureichenden Punkte ausgedrückten, Raumgröße die oben ausgesetzten Formen der Coordinaten, so ist nichts übrig, als die Elimination der Coordinaten der Ecken der Pyramide ABCD auszuführen, wozu die Methode der Projectionen die geeigneten Hilfsmittel darbietet. Als Grundlage können hierbei die von la Grange in angeführter Abhandlung aufgestellten Relationen *) dienen, nachdem sie aber für ein beliebiges rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Ursprung nicht in einer der Ecken der Pyramide liegt, ausgedehnt und umgearbeitet worden sind. Hierdurch

*) Man findet sie auch in Meier Hirsch's Sammlung geometrischer Aufgaben, in Puissant's propositions de géometrie, und v. Straszniki: das geradl. Dreieck, und die dreis. Pyramide, Wien 1817.

ergeben sich noch drei Systeme solcher und durch gegenseitige Beziehung dieser mit einander und dem ersten noch mehre höchst brauchbare Formeln, durch welche man im Stande ist, die Elimination der Coordinaten zu bewerkstelligen. Hier folgen die Auflösungen der Hauptprobleme, in welchen durchaus die Quadrate der Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC der Reihe nach durch f, g, h, f', g', h' vorgestellt sind.

1. **Aus den Coefficienten zweier Punkte ihren Abstand von einander zu finden.**

Es seien die, den Ecken A, B, C, D zugeordneten Coefficienten zweier beliebigen Punkte a, b, c, d des einen, und a', b', c', d' des anderen, so ist das Quadrat ihres Abstandes von einander gleich

$$\left.\begin{array}{l}(a - a')(d' - d)f' + (b - b')(d' - d)g' + (c - c')(d' - d)h' \\ (b - b')(c' - c)f + (a - a')(c' - c)g + (a - a')(b' - b)h\end{array}\right\}$$

2. **Aus den Coefficienten dreier Punkte den Inhalt des, durch sie bestimmten, ebenen Dreiecks zu finden.**

Es seien die Coefficienten der drei Punkte a, b, c, d; a', b', c', d'; a'', b'', c'', d'', und

$$\begin{array}{l}ab' + a'b'' + a''b - a'b - a''b' - ab'' = \gamma \\ ac' + a'c'' + a''c - a'c - a''c' - ac'' = \beta \\ bc' + b'c'' + b''c - b'c - b''c' - bc'' = \alpha \\ dc' + d'c'' + d''c - d'c - d''c' - dc'' = \gamma' \\ db' + d'b'' + d''b - d'b - d''b' - db'' = \beta' \\ da' + d'a'' + d''a - d'a - d''a' - da'' = \alpha'\end{array}$$

so ist das Quadrat des verlangten Inhaltes gleich

$$\left.\begin{array}{l}2\alpha\alpha'(gg' - hh') - 2\alpha\beta fg + 2\alpha\beta' f'g' + 2\beta\alpha' g f' + 2\gamma\alpha' h f' \\ 2\beta\beta'(ff' - hh') + 2\alpha\gamma fh - 2\alpha\gamma' f h' - 2\beta\gamma' g h' - 2\gamma\beta' h g' \\ 2\gamma\gamma'(ff' - gg') - 2\beta\gamma gh - 2\beta'\gamma' g'h' - 2\alpha'\gamma' f'h' - 2\alpha'\beta' f'g' \\ \quad - \alpha^2 f^2 - \beta^2 g^2 - \gamma^2 h^2 - \alpha'^2 f'^2 - \beta'^2 g'^2 - \gamma'^2 h'^2\end{array}\right\} : 16$$

3. **Aus den Coefficienten vierer Punkte den Inhalt der durch sie bestimmten dreieckigen Pyramide zu finden.**

Es bleibe Alles wie in der vorigen Aufgabe, und die Coefficienten eines vierten Punktes seien a''', b''', c''', d'''; so verhält sich der verlangte Inhalt zum Inhalte der Pyramide ABCD wie

$$(a - a''')\alpha - (b - b''')\beta + (c - c''')\gamma$$

zu Eins.

4. Von jeder zweier beliebigen geraden Linien sind die Coefficienten irgend zweier in ihr befindlichen Punkte gegeben. Aus diesen den Winkel, welche jene mit einander bilden, zu berechnen.

Es seien die Coefficienten vierer Punkte E, E′, E″, E‴ wie zuvor a, b, c, d; a′, . . .; a″ . .; a‴ . .; so ist der Cosinus des Winkels, welchen die geraden Linien EE′, E″E‴ mit einander bilden, gleich

$$\left.\begin{array}{l} [(d-d')(a'''-a'')+(d''-d''')(a'-a)]\,f'+[(b-b')(c'''-c'')+(b''-b''')(c'-c)]\,f \\ [(d-d')(b'''-b'')+(d''-d''')(b'-b)]\,g'+[(a-a')(c'''-c'')+(a''-a''')(c'-c)]\,g \\ [(d-d')(c'''-c'')+(d''-d''')(c'-c)]\,h'+[(a-a')(b'''-b'')+(a''-a''')(b'-b)]\,h \end{array}\right\} : 2pq$$

wo p, q die Abstände EE′, E″E‴ bezeichnen.

5. Von jeder zweier beliebigen Ebenen sind die Coefficienten irgend dreier in ihr befindlichen Punkte gegeben. Aus diesen den Winkel, welchen jene mit einander bilden, zu berechnen.

Es seien die Coefficienten sechser Punkte

a , b , c , d des Punktes e ; A , B , C , D des Punktes E
a′, b′, c′, d′ " " e′; A′, B′, C′, D′ " " E′
a″, b″, c″, d″ " " e″; A″, B″, C″, D″ " " E″

und 𝔄, 𝔅, ℭ, 𝔄′, 𝔅′, ℭ′ die nämlichen Funktionen der Größen A, B, C, D; A′..., welche in 2 die α, β, γ, α′, β′, γ′ von den a, b, c, d, a′... sind; so ist, wenn φ den verlangten Winkel und δ, Δ die Inhalte der ebenen Dreiecke ee′e″, EE′E″ bezeichnen

$$16\delta\Delta\cos\varphi =$$
$$\left.\begin{array}{r} (\alpha\mathfrak{A}'+\alpha'\mathfrak{A})(gg'-hh')+(\beta\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{B})(ff'-hh')+(\gamma\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{C})(ff'-gg') \\ -(\alpha\mathfrak{B}+\beta\mathfrak{A})fg+(\alpha\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{A})fg'+(\beta\mathfrak{A}'+\alpha'\mathfrak{B})gf'+(\gamma\mathfrak{A}'+\alpha'\mathfrak{C})hf' \\ +(\alpha\mathfrak{C}+\gamma\mathfrak{A})fh-(\alpha\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{A})fh'-(\beta\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{B})gh'-(\gamma\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{C}')gh' \\ -(\beta\mathfrak{C}+\gamma\mathfrak{B})gh-(\beta'\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{B}')g'h'-(\alpha'\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{A}')f'h'-(\alpha'\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{A}')f'g' \\ -\alpha\mathfrak{A}f^2-\beta\mathfrak{B}g^2-\gamma\mathfrak{C}h^2-\alpha'\mathfrak{A}'f'^2-\beta'\mathfrak{B}'g'^2-\gamma'\mathfrak{C}'h'^2 \end{array}\right\}$$

6. Aus den Coefficienten der bestimmenden Punkte einer Ebene und geraden Linie den Winkel, welchen sie miteinander bilden, zu berechnen.

Es bleibe Alles wie in der vorigen Aufgabe; so ist der Sinus des Winkels, welchen die gerade Linie EE′ = p mit der Ebene des Dreiecks ee′e″ = δ bildet, gleich

$$[(A'-A)\,\alpha-(B'-B)\,\beta+(C'-C)\,\gamma] : p\delta.$$

7. Aus den Coefficienten der Endpunkte zweier geraden Linien die Größe ihres kürzesten Abstandes von einander zu finden.

Es bleibe Alles wie in 4., so ist der kürzeste Abstand der geraden Linien EE', $E''E'''$ von einander gleich

$$3\,\mathfrak{P} : \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos(E, E')} = 3\,\mathfrak{P} : \sqrt{E''^2 + E'''^2 - 2E''E''' \cos(E'', E''')}$$

wo $\mathfrak{P}$ den aus (3) bekannten, Inhalt der Pyramide $EE'E''E'''$, und die E, E', E'', E''' die Inhalte der ebenen Dreiecke $E'E''E'''$, $EE''E'''$, $EE'E'''$, $EE'E''$ bezeichnen. Vertauscht man nun in den Ausdrücken der α, β, γ, α', β', γ' des §. 2, durchaus die ungestrichenen Buchstaben mit den dreigestrichenen, d. i. die a, b, c, d mit a''', b''', c''', d''', und bezeichnet die also entstandenen Ausdrücke der Reihe nach durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, so kommt (§§. 2. 5.)

$$E^2 + E'^2 - 2EE' \cos(E, E') =$$

$$\left.\begin{array}{l}
2(\alpha-\mathfrak{A})(\alpha'-\mathfrak{A}')(gg'-hh') - 2(\alpha-\mathfrak{A})(\beta-\mathfrak{B})fg + 2(\alpha-\mathfrak{A})(\beta'-\mathfrak{B}')fg' \\
2(\beta-\mathfrak{B})(\beta'-\mathfrak{B}')(ff'-hh') + 2(\alpha-\mathfrak{A})(\gamma-\mathfrak{C})fh - 2(\alpha-\mathfrak{A})(\gamma'-\mathfrak{C}')fh' \\
2(\gamma-\mathfrak{C})(\gamma'-\mathfrak{C}')(ff'-gg') - 2(\beta-\mathfrak{B})(\gamma-\mathfrak{C})gh - 2(\beta'-\mathfrak{B}')(\gamma'-\mathfrak{C}')g'h' \\
\;\;2(\beta-\mathfrak{B})(\alpha'-\mathfrak{A}')gf' + 2(\gamma-\mathfrak{C})(\alpha'-\mathfrak{A}')hf' - (\alpha-\mathfrak{A})^2f^2 - (\alpha'-\mathfrak{A}')^2f'^2 \\
-2(\beta-\mathfrak{B})(\gamma'-\mathfrak{C}')gh' - 2(\gamma-\mathfrak{C})(\beta'-\mathfrak{B}')hg' - (\beta-\mathfrak{B})^2g^2 - (\beta'-\mathfrak{B}')^2g'^2 \\
-2(\alpha'-\mathfrak{A}')(\gamma'-\mathfrak{C}')f'h' - 2(\alpha'-\mathfrak{A}')(\beta'-\mathfrak{B}')f'g' - (\gamma-\mathfrak{C})^2h^2 - (\gamma'-\mathfrak{C}')^2h'^2
\end{array}\right\}.$$

Diese Formel, so wie auch die in 1. 2. 4. 5 mitgetheilten Ausdrücke sind insbesondere für die Berechnung der Dimensionen der Pyramide aus ihren Kanten entworfen. Da aber die Summe der vier Coefficienten eines jeden Punktes der Einheit gleich ist, so kann man jedesmal sämmtliche, einer und der nämlichen Ecke z. B. der D zugeordneten, Coefficienten mit Hilfe dieser Gleichung eliminiren. Alsdann erscheinen die Ausdrücke (1), (4) in der Form:

$$\alpha f' + \beta g' + \gamma h' + \gamma' \sqrt{f'g'} \cos\varphi + \beta' \sqrt{f'h'} \cos\psi + \alpha' \sqrt{g'h'} \cos\chi$$

und die Ausdrücke der Aufgaben (2), (5) und dieser in der Form

$$\alpha A^2 + \beta B^2 + \gamma C^2 + \gamma' \cos(A, B) + \beta' \cos(A, C) + \alpha' \cos(B, C)$$

wo die α, β, γ Funktionen der den Ecken A, B, C zugeordneten Coefficienten, φ, ψ, χ die Winkel, welche die Kanten an der Spitze D mit einander bilden, vorstellen, und A, B, C die Inhalte der ebenen Dreiecke DBC, DAC, DAB bezeichnen. Sonach ist das Quadrat des in der 1. Aufgabe verlangten Abstandes auch gleich

$$\begin{array}{l}
(a'-a)^2f' + 2(b'-b)(c'-c)\sqrt{g'h'}\cos\chi \\
(b'-b)^2g' + 2(a'-a)(c'-c)\sqrt{f'h'}\cos\psi \\
(c'-c)^2h' + 2(a'-a)(b'-b)\sqrt{f'g'}\cos\varphi
\end{array}$$

und der Cosinus des in der 4. Aufgabe verlangten Winkels gleich

$$\left.\begin{array}{l}(a'-a)\,(a'''-a'')\,f'+[(b'-b)\,(c'''-c'')+(b'''-b'')\,(c'-c)]\,\sqrt{g'h'}\cos\chi\\(b'-b)\,(b'''-b'')\,g'+[(a'-a)\,(c'''-c'')+(a'''-a'')\,(c'-c)]\,\sqrt{f'h'}\cos\psi\\(c'-c)\,(c'''-c'')\,h'+[(a'-a)\,(b'''-b'')+(a'''-a'')\,(b'-b)]\,\sqrt{f'g'}\cos\varphi\end{array}\right\}:pq,$$

ferner, wenn A, B, C, D die Inhalte der ebenen Dreiecke DBC, DAC, DAB, ABC und m, n, p, m′, n′, p′ die Winkel ihrer Ebenen (D, A) (D, B) (D, C) (B, C) (A, C) (A, B) bezeichnen, das Quadrat des in der 2. Aufgabe verlangten Inhaltes gleich.

$$\begin{array}{l}\alpha^2A^2+\beta^2B^2+\gamma^2C^2+2\beta\gamma\,BC\cos m'-2\alpha\gamma\,AC\cos n'+2\alpha\beta\,AB\cos p'=\\\alpha^2D^2+\gamma'^2B^2+\beta'^2C^2+2\beta'\gamma'BC\cos m'-2\alpha\beta'DC\cos p+2\alpha\gamma'DB\cos n=\\\beta^2D^2+\gamma'^2A^2+\alpha'^2C^2+2\alpha'\gamma'AC\cos n'-2\beta\alpha'DC\cos p+2\beta\gamma'DA\cos m=\\\gamma^2D^2+\beta'^2A^2+\alpha'^2B^2+2\alpha'\beta'AB\cos p'-2\gamma\alpha'DB\cos n+2\gamma\beta'DA\cos m\end{array}$$

Ferner ist der Cosinus des in der 5. Aufgabe verlangten Winkels auch gleich

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\mathfrak{A}A^2+(\beta\mathfrak{C}+\gamma\mathfrak{B})\,BC\cos m'\\\beta\mathfrak{B}B^2-(\alpha\mathfrak{C}+\gamma\mathfrak{A})\,AC\cos n'\\\gamma\mathfrak{C}C^2+(\alpha\mathfrak{B}+\beta\mathfrak{A})\,AB\cos p'\end{array}\right\}:\delta\Delta$$

$$=$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha\mathfrak{A}D^2+(\beta'\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{B}')\,BC\cos m'\\\gamma'\mathfrak{C}'B^2-(\alpha\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{A})\,DC\cos p\\\beta'\mathfrak{B}'C^2+(\alpha\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{A})\,DB\cos n\end{array}\right\}:\delta\Delta$$

$$=$$

$$\left.\begin{array}{l}\beta\mathfrak{B}D^2+(\alpha'\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{A}')\,AC\cos n'\\\gamma'\mathfrak{C}'A^2-(\beta\mathfrak{A}'+\alpha'\mathfrak{B})\,DC\cos p\\\alpha'\mathfrak{A}'C^2+(\beta\mathfrak{C}'+\gamma'\mathfrak{B})\,DA\cos m\end{array}\right\}:\delta\Delta$$

$$=$$

$$\left.\begin{array}{l}\gamma\mathfrak{C}D^2+(\alpha'\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{A}')\,AB\cos p'\\\beta'\mathfrak{B}'A^2-(\gamma\mathfrak{A}'+\alpha'\mathfrak{C})\,DB\cos n\\\alpha'\mathfrak{A}'B^2+(\gamma\mathfrak{B}'+\beta'\mathfrak{C})\,DA\cos m\end{array}\right\}:\delta\Delta$$

wo aber die A, B, C, D nicht mehr die Coefficienten des Punktes E, sondern wie vorhin die Inhalte der Seitenflächen der Pyramide ABCD bezeichnen. Endlich ist noch in der Auflösung der 7. Aufgabe

$$E^2+E'^2-2EE'\cos(E,E')=\left\{\begin{array}{l}(\alpha-\mathfrak{A})^2A^2+2(\beta-\mathfrak{B})\,(\gamma-\mathfrak{C})\,BC\cos m'\\(\beta-\mathfrak{B})^2B^2-2(\alpha-\mathfrak{A})\,(\gamma-\mathfrak{C})\,AC\cos n'\\(\gamma-\mathfrak{C})^2C^2+2(\alpha-\mathfrak{A})\,(\beta-\mathfrak{B})\,AB\cos p'\end{array}\right.$$

Erster Abschnitt.

Berechnung und Relationen einiger Dimensionen, welche ein Punkt in Beziehung auf eine Urpyramide mit dieser bestimmt.

§. 1.

Wenn a, b, c, d die, den Ecken A, B, C, D der Pyramide ABCD zugeordneten, Coefficienten eines beliebigen Punktes J, und α, β, γ, δ die Quadrate seiner Abstände von jenen Ecken bezeichnen; so ist (Einl. 1.)

$$\begin{aligned}
\delta &= (1 - d)\,(af' + bg' + ch') - bcf - acg - abh\,,\\
\alpha &= (1 - a)\,(df' + cg + bh) - bcf - dbg' - dch',\\
\beta &= (1 - b)\,(cf + dg' + ah) - daf' - acg - dch',\\
\gamma &= (1 - c)\,(bf + ag + dh') - daf' - dbg' - abh\,,
\end{aligned}$$

wo die f, g, h, f', g', h' wieder die Quadrate von den Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC vorstellen.

Nimmt man diese vier Werthe fürs erste selbst, und dann auch, nachdem sie der Reihe nach durch d, a, b, c multiplicirt worden sind, zusammen, so kommt

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = \left\{\begin{matrix}(d + a - 4da)\,f' + (d + b - 4db)\,g' + (d + c - 4dc)h' \\ (b + c - 4bc)\,f + (a + c - 4ac)\,g + (a + b - 4ab)h\end{matrix}\right\} \quad (1)$$

$$a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = daf' + dbg' + dch' + bcf + acg + abh \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Setzt man diese Größe $a\alpha + b\beta + c\gamma + d\delta = V$, so ist ferner aus obigen Werthen

$$\left.\begin{aligned}
V + \alpha &= df' + cg + bh\,,\\
V + \beta &= cf + dg' + ah\,,\\
V + \gamma &= bf + ag + dh',\\
V + \delta &= af' + bg' + ch',
\end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und

$$\left.\begin{aligned}
(1 - a)\;V - a\alpha &= bcf + dbg' + dch',\\
(1 - b)\;V - b\beta &= daf' + acg + dch',\\
(1 - c)\;V - c\gamma &= daf' + dbg' + abh\,,\\
(1 - d)\;V - d\delta &= bcf + acg + abh\,.
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Zieht man aber jeden und auch je zwei der obigen Werthe von α, β, γ, δ für's erste selbst, und dann auch, nachdem sie der Reihe nach durch a, b, c, d multiplicirt sind, jedesmal von der Summe der übrigen ab, so kommen folgende Relationen

$$\alpha+\beta+\gamma-\delta=\left\{\begin{matrix}(d-a-2da)\,f'+(d-b-2db)\,g'+(d-c-2dc)\,h'\\(b+c-2bc)\,f+(a+c-2ac)\,g+(a+b-2ab)\,h\end{matrix}\right\} \quad (5)$$

u. d. ü.

$$\alpha+\beta-\gamma-\delta=\left\{\begin{matrix}(d-a)\,f'+(d-b)\,g'-(d+c)\,h'\\(c-b)\,f+(c-a)\,g+(a+b)\,h\end{matrix}\right\} \quad (6)$$

u. d. ü.

$$a\alpha+b\beta+c\gamma-d\delta=\left\{\begin{matrix}d\,(2d-1)\,(af'+bg'+ch')\\(2d-1)\,(bcf+acg+abh)\end{matrix}\right\} \quad (7)$$

u. d. ü.

$$a\alpha+b\beta-c\gamma-d\delta=\left\{\begin{matrix}ab\,(1+2d+2c)\,h-dc\,(1+2a+2b)\,h'\\(1-2a-2b)\,(daf'+bcf+dbg'+acg)\end{matrix}\right\} \quad (8)$$

u. d. ü.

Auch ist aus den Gleichungen (2) und (8)

$$\left.\begin{matrix}(d+a)\,(d\delta+a\alpha)-(b+c)\,(b\beta+c\gamma)=daf'-bcf\\(d+b)\,(d\delta+b\beta)-(a+c)\,(a\alpha+c\gamma)=dbg'-acg\\(d+c)\,(d\delta+c\gamma)-(a+b)\,(a\alpha+b\beta)=dch'-abh\end{matrix}\right\} \quad (9)$$

und durch Addition der Gleichungen (1), (2), nachdem diese durch 4 multiplicirt worden ist, noch

$$(1+4a)\,\alpha+(1+4b)\,\beta+(1+4c)\,\gamma+(1+4d)\,\delta$$
$$=$$
$$(d+a)\,f'+(d+b)\,g'+(d+c)\,h'+(b+c)\,f+(a+c)\,g+(a+b)\,h$$

§. 2.

Wenn a′, b′, c′, d′ die Coefficienten eines zweiten beliebigen Punktes J′ und α', β', γ', δ' die Quadrate seiner Abstände von den Ecken A, B, C, D bezeichnen, so ist mit Hilfe des vorigen Paragraphen

$$\overline{JJ'}^2=a'\alpha+b'\beta+c'\gamma+d'\delta-d'a'f'-d'b'g'-d'c'h'-b'c'f-a'c'g-a'b'h,$$
$$=a\alpha'+b\beta'+c\gamma'+d\delta'-d\,a\,f'-d\,b\,g'-d\,c\,h'-b\,c\,f-a\,c\,g-a\,b\,h,$$

folglich aus (2) des vor. Paragraphen

$$\overline{JJ'}^2=a\,(\alpha'-\alpha)+b\,(\beta'-\beta)+c\,(\gamma'-\gamma)+d\,(\delta'-\delta),$$
$$=a'(\alpha-\alpha')+b'(\beta-\beta')+c'(\gamma-\gamma')+d'(\delta-\delta'),$$

woher

$$(a + a')(\alpha - \alpha') + (b + b')(\beta - \beta') + (c + c')(\gamma - \gamma') + (d + d')(\delta - \delta') = 0$$

und der merkwürdige Saz folgt:

Wenn das Quadrat des Abstandes jeder Ecke der Pyramide ABCD von einem, in der Oberfläche irgend einer Kugel beliebig genommenen, Punkte durch den, eben dieser Ecke zugeordneten, Coefficienten des Mittelpunkts der Kugel multiplicirt wird, so ist die algebraische Summe dieser vier Producte eine constante Größe.

§. 3.

Es seien R der Halbmesser, und a, b, c, d die Coefficienten vom Mittelpunkte der um die Pyramide ABCD beschriebenen Kugel, so folgt aus den Relationen des §. 1, nämlich aus (1)

$$4R^2 = \left\{\begin{matrix}(d + a - 4da)\,f' + (d + b - 4db)\,g' + (d + c - 4dc)\,h' \\ (b + c - 4bc)\,f + (a + c - 4ac)\,g + (a + b - 4ab)\,h\end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

aus (2)

$$R^2 = daf' + dbg' + dch' + bcf + acg + abh, \qquad (2)$$

aus (10)

$$8R^2 = \left\{\begin{matrix}(d + a)\,f' + (d + b)\,g' + (d + c)\,h' \\ (b + c)\,f + (a + c)\,g + (a + b)\,h\end{matrix}\right\}, \qquad (3)$$

aus (9)

$$\left.\begin{matrix}(d + a - b - c)\,R^2 = daf' - bcf \\ (d + b - a - c)\,R^2 = dbg' - acg \\ (d + c - a - b)\,R^2 = dch' - abh\end{matrix}\right\}, \qquad (4)$$

aus (3)

$$\left.\begin{matrix}2R^2 = af' + bg' + ch' \\ = df' + cg + bh \\ = cf + dg' + ah \\ = bf + ag + dh'\end{matrix}\right\} \qquad (5)$$

und aus (4)

$$\left.\begin{matrix}(1 - 2a)\,R^2 = bcf + dbg' + dch', \\ (1 - 2b)\,R^2 = daf' + acg + dch', \\ (1 - 2c)\,R^2 = daf' + dbg' + abh, \\ (1 - 2d)\,R^2 = bcf' + acg + abh,\end{matrix}\right\} \qquad (6)$$

ferner durch Combination je zweier der drei in (6) angezeigten Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l}(\mathfrak{c} - \mathfrak{b})\, f + \mathfrak{d}\,(g' - h') + \mathfrak{a}\,(h - g) = 0\\ (\mathfrak{c} - \mathfrak{b})\, g + \mathfrak{d}\,(f' - h') + \mathfrak{b}\,(h - f) = 0\\ (\mathfrak{b} - \mathfrak{a})\, h + \mathfrak{d}\,(f' - g') + \mathfrak{c}\,(g - f) = 0\end{array}\right\} \quad (7)$$

§. 4.

Es sei k der Abstand des Mittelpunkts der Kugel ABCD vom Punkte J, so folgt aus §. 2.

$$k^2 = + R^2 - a\alpha - b\beta - c\gamma - d\delta,$$
$$= - R^2 + \mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{d}\delta,$$

woher sich sogleich ergibt

$$2 R^2 = (a + \mathfrak{a})\,\alpha + b + \mathfrak{b}\,\beta + (c + \mathfrak{c})\,\gamma + (d + \mathfrak{d})\,\delta$$

und

$$2k^2 = (\mathfrak{a} - a)\,\alpha + (\mathfrak{b} + b)\,\beta + (\mathfrak{c} - c)\,\gamma + (\mathfrak{d} + d)\,\delta$$

§. 5.

Sucht man aus den vier Gleichungen (3) des §. 1 die Werthe der a, b, c, d, aus den Größen f, g, h, f', g', h', α, β, γ, δ, $\mathfrak{V}$, und setzt hierbei

$$gg' + hh' - ff' = F,\ ff' + hh' - gg' = G,\ ff' + gg' - hh' = H$$
$$ff'F + gg'G + hh'H = Q$$
$$fF + g'G + h'H - 2\,fg'h' = \mathfrak{A}$$
$$f'F + g\,G + h'H - 2\,f'g\,h' = \mathfrak{B}$$
$$f'F + g'G + h\,H - 2\,f'g'h = \mathfrak{C}$$
$$fF + g\,G + h\,H - 2\,f\,g\,h = \mathfrak{D}$$

$$fF\delta + g'G\gamma + h'H\beta - 2\,f\,g'h'\alpha = \mathfrak{A}'$$
$$f'F\gamma + g\,G\delta + h'H\alpha - 2\,f'g\,h'\beta = \mathfrak{B}'$$
$$f'F\beta + g'G\alpha + h\,H\delta - 2\,f'g'h\,\gamma = \mathfrak{C}'$$
$$fF\alpha + g\,G\beta + h\,H\gamma - 2\,f\,g\,h\,\delta = \mathfrak{D}'$$

so daß also

$$Q = f'\mathfrak{A} + g'\mathfrak{B} + h'\mathfrak{C} = f'\mathfrak{D} + h\mathfrak{B} + g\mathfrak{C} = g'\mathfrak{D} + h\mathfrak{A} + f\mathfrak{C} = h'\mathfrak{D} + g\mathfrak{A} + f\mathfrak{B}$$

ferner

$$\mathfrak{A}' + \mathfrak{B}' + \mathfrak{C}' + \mathfrak{D}' = \mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\delta$$

und

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} + \mathfrak{D} = 288\,\Pi^2$$

ist, wo Π den körperlichen Inhalt der Pyramide ABCD vorstellt, so ergiebt sich endlich

$$\left.\begin{aligned} Qa &= \mathfrak{A}' + \mathfrak{A}V, \\ Qb &= \mathfrak{B}' + \mathfrak{B}V, \\ Qc &= \mathfrak{C}' + \mathfrak{C}V, \\ Qd &= \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}V, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Nimmt man diese vier Gleichungen fürs erste selbst, und dann auch, nachdem sie der Reihe nach durch α, β, γ, δ multiplicirt worden sind, zusammen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} V &= (Q - \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' - \mathfrak{C}' - \mathfrak{D}') : 288\,\Pi^2 \\ &= (\mathfrak{A}'\alpha + \mathfrak{B}'\beta + \mathfrak{C}'\gamma + \mathfrak{D}'\delta) : (Q - \mathfrak{A}' - \mathfrak{B}' - \mathfrak{C}' - \mathfrak{D}') \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Substituirt man demnach einen dieser beiden Werthe von V in jede der Gleichungen (1), so ist die Aufgabe aufgelöst:

Aus den vier Abständen eines beliebigen Punktes von den Ecken der Pyramide ABCD seine vier, denselben zugeordneten, Coefficienten zu berechnen.

§. 6.

Sezt man die beiden Werthe von V im vor. § einander gleich, so ergibt sich die Relation zwischen den zehn Abständen $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ der fünf Punkte J, A, B, C, D von einander

$$(Q - \mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta - \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\delta)^2 = 288\,\Pi^2\,(\mathfrak{A}'\alpha + \mathfrak{B}'\beta + \mathfrak{C}'\gamma + \mathfrak{D}'\delta).$$

§. 7.

Für den besondern Fall, daß $\alpha = \beta = \gamma = \delta = R^2$ ist, ergibt sich aus dem vorigen Paragraphen

$$24\,\Pi R = \sqrt{Q}$$

und aus den Gleichungen (1) des §. 5.

$$288\,\Pi^2\mathfrak{a} = \mathfrak{A},\ 288\,\Pi^2\mathfrak{b} = \mathfrak{B},\ 288\,\Pi^2\mathfrak{c} = \mathfrak{C},\ 288\,\Pi^2\mathfrak{d} = \mathfrak{D}.$$

§. 8.

Substituirt man aus dem vor. §. die Werthe von Q, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ in die Relation des §. 6., so wird sie

$$\mathfrak{A}'\alpha + \mathfrak{B}'\beta + \mathfrak{C}'\gamma + \mathfrak{D}'\delta = 288\,\Pi^2\,(2R^2 - \mathfrak{a}\alpha - \mathfrak{b}\beta - \mathfrak{c}\gamma - \mathfrak{d}\delta)$$

§. 9.

Bezeichnet man die Inhalte der ebenen Dreiecke ABC, DBC, DAC, DAB durch

D, A, B, C und die Winkel ihrer Ebenen (D, A) (D, B) (D, C) (B, C) (A, C) (A, B) durch m, n, p, m′, n′, p′; so ist

$$f g' h' = 16 (R^2 A^2 - 9 \Pi^2 \mathfrak{a}^2)$$
$$f' g h' = 16 (R^2 B^2 - 9 \Pi^2 \mathfrak{b}^2)$$
$$f' g' h = 16 (R^2 C^2 - 9 \Pi^2 \mathfrak{c}^2)$$
$$f g h = 16 (R^2 D^2 - 9 \Pi^2 \mathfrak{d}^2)$$

und

$$\mathfrak{DA} = 16 (18 \Pi^2 f F - QDA \cos m)$$
$$\mathfrak{DB} = 16 (18 \Pi^2 g G - QDB \cos n)$$
$$\mathfrak{DC} = 16 (18 \Pi^2 h H - QDC \cos p)$$
$$\mathfrak{BC} = 16 (18 \Pi^2 f' F - QBC \cos m')$$
$$\mathfrak{AC} = 16 (18 \Pi^2 g' G - QAC \cos n')$$
$$\mathfrak{AB} = 16 (18 \Pi^2 h' H - QAB \cos p')$$

Entwickelt man demnach die Relation des §. 8., so wird sie mit Hilfe dieser Formeln:

$$\left.\begin{array}{l} A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\gamma^2 + D^2\delta^2 \\ - 2\delta\alpha DA \cos m - 2\beta\gamma BC \cos m' \\ - 2\delta\beta DB \cos n - 2\alpha\gamma AC \cos n' \\ - 2\delta\gamma DC \cos p - 2\alpha\beta AB \cos p' \end{array}\right\}$$
$$=$$
$$36 \Pi^2 (\mathfrak{a}\alpha + \mathfrak{b}\beta + \mathfrak{c}\gamma + \mathfrak{d}\delta - R^2);$$

wobei man bemerke, daß (§. 4) der Faktor von $36\Pi^2$ dem Quadrate vom Abstande k des Punkts J vom Mittelpunkt der Kugel ABCD gleich ist.

§. 10.

Substituirt man in der, im vorigen §. gefundenen, Relation die bekannten Werthe der Quadrate der Seitenflächen aus ihren Kanten, und

$$16 DA \cos m = f(-2f' - f + g' + g + h' + h) + (g - h)(g' - h'),$$
$$16 DB \cos n = g(+ f' + f - 2g' - g + h' + h) + (f - h)(f' - h'),$$
$$16 DC \cos p = h(+ f' + f + g' + g - 2h' - h) + (f - g)(f' - g'),$$
$$16 BC \cos m' = f'(- f' - 2f - g' + g + h' + h) + (g - h')(g' - h),$$
$$16 AC \cos n' = g'(+ f' + f - g' - 2g + h' + h) + (f - h')(f' - h),$$
$$16 AB \cos p' = h'(+ f' + f + g' + g - h' - 2h) + (f - g')(f' - g);$$

so wird sie:

$$\left.\begin{array}{l}
2fg(\delta-\alpha)(\delta-\beta)+2fh(\delta-\alpha)(\delta-\gamma)+2gh(\delta-\beta)(\delta-\gamma)\\
2fg'(\alpha-\delta)(\alpha-\gamma)+2fh'(\alpha-\delta)(\alpha-\beta)+2g'h'(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)\\
2gf'(\beta-\delta)(\beta-\gamma)+2gh'(\beta-\delta)(\beta-\alpha)+2f'h'(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)\\
2hf'(\gamma-\delta)(\gamma-\beta)+2hg'(\gamma-\delta)(\gamma-\alpha)+2f'g'(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)\\
-2ff'[(\delta+\alpha)(\beta+\gamma)-2\delta\alpha-2\beta\gamma]-f^2(\delta-\alpha)^2-f'^2(\beta-\gamma)^2\\
-2gg'[(\delta+\beta)(\alpha+\gamma)-2\delta\beta-2\alpha\gamma]-g^2(\delta-\beta)^2-g'^2(\alpha-\gamma)^2\\
-2hh'[(\delta+\gamma)(\alpha+\beta)-2\delta\gamma-2\alpha\beta]-h^2(\delta-\gamma)^2-h'^2(\alpha-\beta)^2
\end{array}\right\}$$

$$=$$

$$(24\,\Pi k)^2.$$

Entwickelt man durchaus, so ergibt sich (§§. 4. 7.) eine Relation von 130 Gliedern, die nämliche, welche Carnot (mémoire sur la relat. No. 58) aufgestellt hat.

§. 11.

Für den besondern Fall, daß J in eine Seitenfläche der Pyramide z. B. in die Ebene ABC fällt, ist $d = o$; mithin aus der lezten der Gleichungen (1) in §. 5 und dem ersten daselbst für V gefundenen Werth

$$288\Pi^2\mathfrak{D}' + (Q - \mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta - \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\delta)\,\mathfrak{D} = o \qquad (1)$$

Ordnet man diese Gleichung nach Substitution des Werthes von $\mathfrak{D}'$ nach den α, β, γ, δ, so wird sie, mit Hilfe der, in §. 9 aufgestellten Formeln und folgender

$$\begin{array}{l}
576\Pi^2 f g' h' + \mathfrak{A}^2 = 16QA^2\\
576\Pi^2 f' g' h' + \mathfrak{B}^2 = 16QB^2,\\
576\Pi^2 f' g' h + \mathfrak{C}^2 = 16QC^2,\\
576\Pi^2 f g h + \mathfrak{D}^2 = 16QD^2,
\end{array}$$

$$16D\,(\delta D - \alpha A \cos m - \beta B \cos n - \gamma C \cos p) = \mathfrak{D} \qquad (2)$$

oder, weil bekanntlich $D = A\cos m + B\cos n + C\cos p$ ist,

$$16D\,((\delta-\alpha)\,A\cos m + (\delta-\beta)\,B\cos n + (\delta-\gamma)\,C\cos p) = \mathfrak{D} \qquad (3)$$

Da übrigens hierbei der Inhalt der Pyramide JABC gleich Null wird, so hat man aus dem bekannten, durch die Kanten dieser Pyramide ausgedrückten, Werth derselben noch die Relation

$$\left.\begin{array}{r}
f\alpha(-f+g+h-\alpha+\beta+\gamma)\\
g\beta(+f-g+h+\alpha-\beta+\gamma)\\
h\gamma(+f+g-h+\alpha+\beta-\gamma)\\
-f\beta\gamma-g\alpha\gamma-h\alpha\beta-fgh
\end{array}\right\} = o,$$

woher man erkennt, wie jedes der sechs Quadrate f, g, h, α, β, γ aus der Relation eliminirt werden kann.

Ist z. B. J der Mittelpunkt des, um das Dreieck ABC beschriebenen Kreises, dessen Halbmesser u heiße, so ergibt sich aus der Relation (3)

$$\delta = \mathfrak{D} : 16\mathfrak{D}^2 + u^2$$

oder, wenn i, k, l die Abstände der Fußpunkte der, aus den Spitzen des Dreiecks ABC auf die gegenüber liegenden Seiten f, g, h desselben gefällten Perpendikel von einander bezeichnen, mit Hilfe des in §. 20 meiner Abhandlung, Eigenschaften des Dreiecks, Nürnberg 1822, bewiesenen Satzes

$$\delta = (if' + kg' + lh') : (i + k + l) - u^2$$

§. 12.

Eine andere Relation für eben diesen besondern Fall ergibt sich, wenn man in
$o = \mathfrak{D}' + \mathfrak{D}V$

$$V = (\mathfrak{A}'\alpha + \mathfrak{B}'\beta + \mathfrak{C}'\gamma + \mathfrak{D}'\delta) : (Q - \mathfrak{A}\alpha - \mathfrak{B}\beta - \mathfrak{C}\gamma - \mathfrak{D}\delta)$$

substituirt. Alsdann ist

$$\mathfrak{D}\,(\mathfrak{A}'\alpha + \mathfrak{B}'\beta + \mathfrak{C}'\gamma + \mathfrak{D}'\delta) = \mathfrak{D}'\,(\mathfrak{A}\alpha + \mathfrak{B}\beta + \mathfrak{C}\gamma + \mathfrak{D}\delta - Q)$$

oder

$$(\mathfrak{A}'\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}')\,\alpha + (\mathfrak{B}'\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{D}')\,\beta + (\mathfrak{C}'\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{D}')\,\gamma + Q\mathfrak{D}' = o.$$

Es ist aber

$$\mathfrak{A}'\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{D}' = (gg'G^2 - hh'H^2)(\gamma - \beta) + fQ\begin{Bmatrix}(g + h - f)\,\delta + (h' - g)\,\beta \\ (f - g' - h')\,\alpha + (g' - h)\,\gamma\end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{B}'\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{D}' = (ff'F^2 - hh'H^2)(\gamma - \alpha) + gQ\begin{Bmatrix}(f + h - g)\,\delta + (h' - f)\,\alpha \\ (g - f' - h')\,\beta + (f' - h)\,\gamma\end{Bmatrix},$$

$$\mathfrak{C}'\mathfrak{D} - \mathfrak{C}\mathfrak{D}' = (ff'F^2 - gg'G^2)(\beta - \alpha) + hQ\begin{Bmatrix}(f + g - h)\,\delta + (g' - f)\,\alpha \\ (h - f' - g')\,\gamma + (f' - g)\,\beta\end{Bmatrix},$$

und

$$2hh'H^2 - ff'F^2 - gg'G^2 = (ff' + gg' - 2hh')\,Q,$$
$$2gg'G^2 - ff'F^2 - hh'H^2 = (ff' + hh' - 2gg')\,Q,$$
$$2ff'F^2 - gg'G^2 - hh'H^2 = (gg' + hh' - 2ff')\,Q;$$

folglich

$$
0 = \left.\begin{array}{l}
f(f - g' - h')\,\alpha^2 + g(g - f' - h')\,\beta^2 + h(h - f' - g')\,\gamma^2 \\
f(g + h - f)\,\delta\alpha + g(f + h - g)\,\delta\beta + h(f + g - h)\,\delta\gamma \\
\quad (fh' + gh' - 2fg + H - hh')\,\alpha\beta \\
\quad -(fg' + hg' - 2fh + G - gg')\,\alpha\gamma \\
\quad -(gf' + hf' - 2gh + F - ff')\,\beta\gamma \\
\quad fF\alpha + gG\beta + hH\gamma - 2fgh\delta
\end{array}\right\}
$$

§. 13.

La Grange *) entwickelte für die zehn Abstände der fünf beliebigen Punkte A, B, C, D, J im Raume von einander die Relation

$$
36\Pi^2\delta = \left\{\begin{array}{l}
A^2(f' + \delta - \alpha)^2 + B^2(g' + \delta - \beta)^2 + C^2(h' + \delta - \gamma)^2 \\
- 2(f' + \delta - \alpha)(g' + \delta - \beta)\,AB\cos p' \\
- 2(f' + \delta - \alpha)(h' + \delta - \gamma)\,AC\cos n' \\
- 2(g' + \delta - \beta)(h' + \delta - \gamma)\,BC\cos m'
\end{array}\right.
$$

Sie ist aus den Gleichungen

$$
\begin{array}{l}
(X - a)^2 + (Y - b)^2 + (Z - c)^2 = \delta \\
(X - a')^2 + (Y - b')^2 + (Z - c')^2 = \alpha \\
(X - a'')^2 + (Y - b'')^2 + (Z - c'')^2 = \beta \\
(X - a''')^2 + (Y - b''')^2 + (Z - c''')^2 = \gamma
\end{array}
$$

abgeleitet, wo a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c''; a''', b''', c'''; X, Y, Z der Ordnung nach die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte D, A, B, C, J bezeichnen. Betrachtet man diese vier Gleichungen als die Gleichungen von vier, einander schneidenden Kugeln, welche mit den beliebigen Halbmessern $\sqrt{\delta}$, $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ aus den Ecken D, A, B, C der Pyramide beschrieben sind; so kann man hiermit die Auflösung eines weit allgemeineren Problems verknüpfen. Die sechs Gleichungen vom ersten Grade, welche sich durch Subtraction je zweier obiger vier Gleichungen von einander ergeben, bezeichnen alsdann die sechs, je zweien dieser vier Kugeln gemeinschaftlichen, Durchschnittsebenen. Sie sind, wenn man sezt.

$$
\begin{array}{l}
X - a = x,\ X - a' = x',\ X - a'' = x'',\ X - a''' = x''' \\
Y - b = y,\ Y - b' = y',\ Y - b'' = y'',\ Y - b''' = y''' \\
Z - c = z,\ Z - c' = z',\ Z - c'' = z'',\ Z - c''' = z'''
\end{array}
$$

*) Solutions anal. de quelques probl. sur les Pyramides (Mém. de Berlin. 1755.)

$$(a'-a)\left\{\begin{matrix}x\\x'\\x''\\x'''\end{matrix}\right\}+(b'-b)\left\{\begin{matrix}y\\y'\\y''\\y'''\end{matrix}\right\}+(c'-c)\left\{\begin{matrix}z\\z'\\z''\\z'''\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\delta-\alpha+f'\\\delta-\alpha-f'\\\delta-\alpha+h-g'\\\delta-\alpha-h'+g\end{matrix}\right\}$$

$$(a''-a)\left\{\begin{matrix}x\\x''\\x'\\x'''\end{matrix}\right\}+(b''-b)\left\{\begin{matrix}y\\y''\\y'\\y'''\end{matrix}\right\}+(c''-c)\left\{\begin{matrix}z\\z''\\z'\\z'''\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\delta-\beta+g'\\\delta-\beta-g'\\\delta-\beta+h-f'\\\delta-\beta-h'+f\end{matrix}\right\}$$

$$(a'''-a)\left\{\begin{matrix}x\\x'''\\x'\\x''\end{matrix}\right\}+(b'''-b)\left\{\begin{matrix}y\\y'''\\y'\\y''\end{matrix}\right\}+(c'''-c)\left\{\begin{matrix}z\\z'''\\z'\\z''\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\delta-\gamma+h'\\\delta-\gamma-h'\\\delta-\gamma+g-f'\\\delta-\gamma-g'+f\end{matrix}\right\}$$

$$(a'''-a'')\left\{\begin{matrix}x''\\x'''\\x\\x'\end{matrix}\right\}+(b'''-b'')\left\{\begin{matrix}y''\\y'''\\y\\y'\end{matrix}\right\}+(c'''-c'')\left\{\begin{matrix}z''\\z'''\\z\\z'\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\beta-\gamma+f\\\beta-\gamma-f\\\beta-\gamma+h'-g'\\\beta-\gamma+g-h\end{matrix}\right\}$$

$$(a'''-a')\left\{\begin{matrix}x'\\x'''\\x\\x''\end{matrix}\right\}+(b'''-b')\left\{\begin{matrix}y'\\y'''\\y\\y''\end{matrix}\right\}+(c'''-c')\left\{\begin{matrix}z'\\z'''\\z\\z''\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\alpha-\gamma+g\\\alpha-\gamma-g\\\alpha-\gamma+h'-f'\\\alpha-\gamma+f-h\end{matrix}\right\}$$

$$(a''-a')\left\{\begin{matrix}x'\\x''\\x\\x'''\end{matrix}\right\}+(b''-b')\left\{\begin{matrix}y'\\y''\\y\\y'''\end{matrix}\right\}+(c''-c')\left\{\begin{matrix}z'\\z''\\z\\z'''\end{matrix}\right\}=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\alpha-\beta+h\\\alpha-\beta-h\\\alpha-\beta+g'-f'\\\alpha-\beta+f-g\end{matrix}\right\}$$

Vergleicht man die Gleichungen der drei Durchschnittsebenen, welche je drei dieser vier Kugeln bestimmen, mit einander, so sieht man, daß sich jede derselben durch Subtraktion der beiden übrigen ableiten läßt. Hieraus ergibt sich der Satz:

(A) Wenn drei Kugeln einander schneiden, so schneiden die drei Durchschnittsebenen derselben einander in einer und der nämlichen geraden Linie. Diese gerade Linie heiße die, allen drei Kugeln gemeinschaftliche, Sehne. Entwickelt man ferner aus obigen Gleichungen die Gleichungen der vier, je dreien der vier Kugeln gemeinschaftlichen, Sehnen; so erkennt man, weil die Gleichungen je zweier Sehnen die der übrigen bestimmen, den Satz:

(B) Wenn vier Kugeln einander schneiden, so schneiden sich auch ihre vier gemeinschaftlichen Sehnen in einem und dem nämlichen

Punkte. Dieser Punkt heiße der Centralpunkt der vier Kugeln. Die Werthe von X, Y, Z, welche auf verschiedene Art aus den obigen sechs Gleichungen bestimmt werden können, stellen demnach nicht allein die Coordinaten desjenigen Punktes vor, dessen Abstände von den Ecken A, B, C, D gleich $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ sind, sondern zugleich auch die Coordinaten des Centralpunkts derjenigen vier Kugeln, welche aus den Ecken A, B, C, D mit den Halbmessern $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ beschrieben sind. Im ersten Falle aber ist mit denselben noch eine obiger quadratischer Gleichung, d. i. die Relation zwischen den zehn Quadraten f, g, h, f′, g′, h′, α, β, γ, δ zu verbinden. Die den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten des Centralpunkts der vier Kugeln sind hiernach

$$\mathfrak{d} - D\,[(\delta - \alpha)\,A \cos m + (\delta - \beta)\,B \cos n + (\delta - \gamma)\,C \cos p\,] : 18\Pi^2,$$
$$\mathfrak{a} - A\,[(\alpha - \delta)\,D \cos m + (\alpha - \beta)\,B \cos p' + (\alpha - \gamma)\,C \cos n'] : 18\Pi^2,$$
$$\mathfrak{b} - B\,[(\beta - \delta)\,D \cos n + (\beta - \alpha)\,A \cos p' + (\beta - \gamma)\,C \cos m'] : 18\Pi^2,$$
$$\mathfrak{c} - C\,[(\gamma - \delta)\,D \cos p + (\gamma - \alpha)\,A \cos n' + (\gamma - \beta)\,B \cos m'] : 18\Pi^2,$$

wo wieder $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Coefficienten des Mittelpunkts der Kugel ABCD sind.

Dem Satze (B) ist in der Ebene folgender von Carnot (géom. de pos. No. 305, oder Schum. Uebers. II. Th. S. 104) aufgestellter analog:

Wenn in einer Ebene drei Kreise einander schneiden, und man zieht durch die Durchschnittspunkte je zweier gerade Linien, so schneiden sich diese drei geraden Linien in einem und dem nämlichen Punkte.

Es seien aus den Ecken A, B, C des ebenen Dreiecks A, B, C in seiner Ebene mit den Halbmessern $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$ drei einander schneidende Kreise beschrieben, so sind die den Ecken A, B, C zugeordneten Coefficienten des Durchschnittspunkts ihrer drei gemeinschaftlichen Sehnen

$$[f\,(g + h - f) - 2f\alpha + (f + g - h)\,\beta + (f + h - g)\,\gamma] : 16D^2$$
$$[g\,(f + h - g) - 2g\beta + (f + g - h)\,\alpha + (g + h - f)\,\gamma] : 16D^2$$
$$[h\,(f + g - h) - 2h\gamma + (f + h - g)\,\alpha + (g + h - f)\,\beta] : 16D^2.$$

Dieser Durchschnittspunkt der drei gemeinschaftlichen Sehnen fällt nun

1. in den Mittelpunkt des um das Dreieck beschriebenen Kreises, wenn $\alpha = \beta = \gamma$
2. in den Mittelpunkt des in das Dreieck beschriebenen Kreises, wenn
$$\alpha - \sqrt{gh} = \beta - \sqrt{fh} = \gamma - \sqrt{fg}$$
3. in den Durchschnittspunkt der drei Perpendikel des Dreiecks, wenn
$$\alpha - g - h = \beta - f - h = \gamma - f - g$$

4. in den Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die Fußpunkte der drei Perpendikel des Dreiecks geht, wenn

$$2\alpha - g - h = 2\beta - f - h = 2\gamma - f - g.$$

5. in den Schwerpunkt des Dreiecks, wenn

$$3\alpha - g - h = 3\beta - f - h = 3\gamma - f - g,$$

ist.

§. 14.

Durch die in §. 9. mitgetheilte Form der Relation zwischen den zehn Quadraten f, g, h, f′, g′, h′, α, β, γ, δ ist man im Stande, das bekannte Problem: Zu vier beliebigen Kugeln eine fünfte, welche jede derselben berührt, zu finden, auf eine sehr einfache Art aufzulösen. Es seien nämlich A, B, C, D die Mittelpunkte der vier gegebenen Kugeln, a, b, c, d ihre Halbmesser und V der Halbmesser einer fünften Kugel, welche jede derselben berühre. Setzt man nun in der angezeigten Relation statt $\sqrt{\alpha}$, $\sqrt{\beta}$, $\sqrt{\gamma}$, $\sqrt{\delta}$ der Ordnung nach V + a, V + b, V + c, V + d, und Kürze halber

$$\left.\begin{array}{l} 3\,(a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 + d^2D^2) \\ -2\begin{cases} daDA\cos m + dbDB\cos n + dcDC\cos p \\ bcBC\cos m' + acAC\cos n' + abAB\cos p' \end{cases} \end{array}\right\} = N$$

$$\left.\begin{array}{l} a^3A^2 + b^3B^2 + c^3C^2 + d^3D^2 \\ - da\,(d+a)\,DA\cos m - db\,(d+b)\,DB\cos n - dc\,(d+c)\,DC\cos p \\ - bc\,(b+c)\,BC\cos m' - ac\,(a+c)\,AC\cos n' - ab\,(a+b)\,AB\cos p' \end{array}\right\} = M$$

$$\left.\begin{array}{l} a^4A^2 + b^4B^2 + c^4C^2 + d^4D^2 \\ - 2d^2a^2DA\cos m - 2d^2b^2DB\cos n - 2d^2c^2DC\cos p \\ - 2b^2c^2BC\cos m' - 2a^2c^2AC\cos n' - 2a^2b^2AB\cos p' \end{array}\right\} = P$$

ferner $\mathfrak{a}a + \mathfrak{b}b + \mathfrak{c}c + \mathfrak{d}d = m$, und $\mathfrak{a}a^2 + \mathfrak{b}b^2 + \mathfrak{c}c^2 + \mathfrak{d}d^2 - R^2 = p$, wo wieder $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Coefficienten vom Mittelpunkte der Kugel ABCD und R ihren Halbmesser bezeichnen, so ergibt sich

$$2NV^2 + 4(M - 18m\Pi^2)V + P - 36p\Pi^2 = 0.$$

Für den besondern Fall, daß die Oberflächen der vier gegebenen Kugeln durch einen und den nämlichen Punkt gehn, ist $36\Pi^2 p = P$ folglich

$$NV = 2\,(18m\Pi^2 - M).$$

Carnot zeigte (géom. de pos. Nr. 357 od. Schum. Uebers. II. Th. S. 182) zur Auflösung dieser Aufgabe einen Weg, welcher durch eine langwierige Rechnung

auf eine Gleichung vom achten Grade führt, bemerkte aber zugleich, daß sich dieselbe vermuthlich auf eine quadratische reduciren werde.

Die verschiedenen Fälle, welche hierbei in Beziehung auf äußere oder innere Berührung der Kugel V mit den Kugeln a, b, c, d statt finden, werden durch gehörige Veränderung der Zeichen dieser Halbmesser angezeigt. Auch lassen sich die Coordinaten und Coefficienten des Mittelpunkts der Kugel V aus dem vor. Paragraphen ohne Schwierigkeit berechnen.

§. 15.

Es seien D', A', B', C' die Durschnittspunkte der geraden Linien JD, JA, JB, JC mit den Seitenflächen ABC, DBC, DAC, DAB; so sind ihre, den Ecken D, A, B, C, D zugeordneten, Coefficienten der Ordnung nach:

$$\begin{array}{lll} 0,\ a:(1-d),\ b:(1-d),\ c:(1-d) & \text{des Punkts} & D', \\ d:(1-a),\ 0,\ b:(1-a),\ c:(1-a) & \text{,,} \quad \text{,,} & A', \\ d:(1-b),\ a:(1-b),\ 0,\ c:(1-b) & \text{,,} \quad \text{,,} & B', \\ d:(1-c),\ a:(1-c),\ b:(1-c),\ 0 & \text{,,} \quad \text{,,} & C', \end{array}$$

wo d, a, b, c wieder die Coefficienten des Punkts J vorstellen.

Hieraus folgt:

$$JD' = d.JD,\ JA' = a.JA,\ JB' = b.JB,\ JC' = c.JC,$$

also, weil $a + b + c + d = 1$ ist,

$$JD':JD + JA':JA + JB':JB + JC':JC = 1,$$

und (E. 3) der Inhalt der Pyramide A'B'C'D' gleich

$$3abcd\Pi : (1-a)(1-b)(1-c)(1-d)$$

§. 16.

Man setze den Abstand $JD = k$, und die Winkel, welche diese gerade Linie mit den Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ der Pyramide ABCD bildet, der Ordnung nach gleich α, β, γ, α', β', γ'; so ist (E. 4.)

$$\cos\alpha' = [(1 + a - d) f' + b (g' - h) + c (h' - g)] : 2k\sqrt{f'}$$
$$\cos\beta' = [(1 + b - d) g' + a (f' - h) + c (h' - f)] : 2k\sqrt{g'}$$
$$\cos\gamma' = [(1 + c - d) h' + a (f' - g) + b (g' - f)] : 2k\sqrt{h'}$$
$$\cos\alpha = [(1 - d)(h' - g') + a (h - g) + (c - b) f] : 2k\sqrt{f}$$
$$\cos\beta = [(1 - d)(h' - f') + b (h - f) + (c - a) g] : 2k\sqrt{g}$$
$$\cos\gamma = [(1 - d)(g' - f') + c (g - f) + (b - a) h] : 2k\sqrt{g}$$

§. 17.

Die Winkel, welche die gerade Linie $JD = k$ mit den Ebenen DBC, DAC, DAB, ABC bildet, seien α, β, γ, δ; so ist (E. 6)

$$3(1-d)\Pi = kD \sin\delta,\ 3a\Pi = kA \sin\alpha,\ 3b\Pi = kB \sin\beta,\ 3c\Pi = kC \sin\gamma.$$

Bezeichnet man ferner die geraden JA, JB, JC durch k', k'', k''' und die Winkel, welche sie mit den gegenüber liegenden Ebenen DBC, DAC, DAB bilden, durch δ', δ'', δ'''; so ist eben so:

$$3(1-a)\Pi = k'A \sin\delta',\ 3(1-b)\Pi = k''B \sin\delta'',\ 3(1-c)\Pi = k'''C \sin\delta'''.$$

Nimmt man diese drei Gleichungen mit der ersten der obigen zusammen, so kommt:

$$9\Pi = kD \sin\delta + k'A \sin\delta' + k''B \sin\delta'' + k'''C \sin\delta'''.$$

Für den besondern Fall, daß J in den Mittelpunkt der um die Pyramide ABCD beschriebenen Kugel, deren Halbmesser R sei, fällt, ergibt sich also hieraus:

$$9\Pi = R(D \sin\delta + A \sin\delta' + B \sin\delta'' + C \sin\delta''').$$

§. 18.

Man lege durch den Punkt J und jede Kante der Pyramide ABCD eine Ebene, so sind, wenn $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ die Inhalte der hierdurch entstandenen sechs ebenen Dreiecke JBC, JAC, JAB, JDA, JDB, JDC bezeichnen, (E. 2)

$$\mathfrak{A}^2 = d^2A^2 + a^2D^2 + 2adAD \cos m,$$
$$\mathfrak{B}^2 = d^2B^2 + b^2D^2 + 2bdBD \cos n,$$
$$\mathfrak{C}^2 = d^2C^2 + c^2D^2 + 2cdCD \cos p,$$
$$\mathfrak{A}'^2 = b^2C^2 + c^2B^2 + 2bcBC \cos m',$$
$$\mathfrak{B}'^2 = a^2C^2 + c^2A^2 + 2acAC \cos n',$$
$$\mathfrak{C}'^2 = a^2B^2 + b^2A^2 + 2abAB \cos p';$$

wodurch zugleich die Aufgabe gelöst ist: Aus den Coefficienten eines Punktes seine Abstände von den Kanten der Pyramide zu berechnen.

§. 19.

Die Winkel, welche die Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ der Pyramide ABCD mit den gegenüber liegenden Ebenen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bilden, seien α, β, γ, α', β', γ', nämlich α der Winkel der $\sqrt{f}$ mit $\mathfrak{A}'$, β der Winkel der $\sqrt{g}$ mit $\mathfrak{B}'$, u. s. f., so ist (E. 6.):

$$3(d + a)\,\Pi = \mathfrak{A}\sin\alpha'.\sqrt{f'}, \quad 3(b + c)\,\Pi = \mathfrak{A}'\sin\alpha.\sqrt{f},$$
$$3(d + b)\,\Pi = \mathfrak{B}\sin\beta'.\sqrt{g'}, \quad 3(a + c)\,\Pi = \mathfrak{B}'\sin\beta.\sqrt{g},$$
$$3(d + c)\,\Pi = \mathfrak{C}\sin\gamma'.\sqrt{h'}, \quad 3(a + b)\,\Pi = \mathfrak{C}'\sin\gamma.\sqrt{h},$$

und also

$$3\Pi = \mathfrak{A}'\sin\alpha.\sqrt{f} + \mathfrak{A}\sin\alpha'.\sqrt{f'}$$
$$= \mathfrak{B}'\sin\beta.\sqrt{g} + \mathfrak{B}\sin\beta'.\sqrt{g'}$$
$$= \mathfrak{C}'\sin\gamma.\sqrt{h} + \mathfrak{C}\sin\gamma'.\sqrt{h'}.$$

§. 20.

Wenn α, β, γ, α', β', γ' die Winkel, welche die Ebene ABC mit den Ebenen der Dreiecke $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$ bildet, bezeichnen; so ist (E. 5).

$$\mathfrak{A}\cos\alpha = aD + dA\cos m,$$
$$\mathfrak{B}\cos\beta = bD + dB\cos n,$$
$$\mathfrak{C}\cos\gamma = cD + dC\cos p,$$

$$\mathfrak{A}'\cos\alpha' = bC\cos p - cB\cos n,$$
$$\mathfrak{B}'\cos\beta' = cA\cos m - aC\cos p,$$
$$\mathfrak{C}'\cos\gamma' = aB\cos n - bA\cos m;$$

woher

$$a\mathfrak{A}'\cos\alpha' + b\mathfrak{B}'\cos\beta' + c\mathfrak{C}'\cos\gamma' = o$$

folgt.

§. 21.

Es seien ϕ, ψ, χ die Winkel der Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$, so ist (E. 5)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\cos\phi = -\,acDB\cos n - dbAC\cos n' + abDC\cos p + dcAB\cos p',$$
$$\mathfrak{B}\mathfrak{B}'\cos\psi = -\,bcDA\cos m - daBC\cos m' + abDC\cos p + dcAB\cos p',$$
$$\mathfrak{C}\mathfrak{C}'\cos\chi = -\,bcDA\cos m - daBC\cos m' + acDB\cos n + dbAC\cos n',$$

folglich

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A}'\cos\phi - \mathfrak{B}\mathfrak{B}'\cos\psi + \mathfrak{C}\mathfrak{C}'\cos\chi = o.$$

§. 22.

Es seien F, G, H, F', G', H' die Durchschnittspunkte der Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ mit den Ebenen $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, nämlich F der $\sqrt{f}$ mit $\mathfrak{A}'$, G der $\sqrt{g}$ mit $\mathfrak{B}'$ u. s. f.; so sind die den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten dieser Durchschnittspunkte

$$d:(d+a),\ a:(d+a),\ o,\ o,\ \text{des Punkts } F'$$
$$d:(d+b),\ o,\ b:(d+b),\ o,\ \text{» » } G'$$
$$d:(d+c),\ o,\ o,\ c:(d+c),\ \text{» » } H'$$
$$o,\ o,\ b:(b+c),\ c:(b+c)\ \text{des Punkts } F,$$
$$o,\ a:(a+c),\ o,\ b:(a+c)\ \text{» » } G,$$
$$o,\ a:(a+b),\ b:(a+b),\ o,\ \text{» » } H;$$

woher man erkennt, daß die geraden Linien FF', GG', HH' (die Durchschnittslinien der Ebenen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$; $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}'$; $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$) die Kanten DA, DB, DC, BC, AC, AB der Ordnung nach in den Verhältnissen $d:a$, $d:b$, $d:c$, $b:c$, $a:c$, $a:b$ schneiden, sie selbst aber durch den Punkt J in den Verhältnissen $d+a:b+c$, $d+b:a+c$, $d+c:a+b$ getheilt werden. Umgekehrt folgt hieraus, daß, wenn die Kanten der Pyramide durch die Punkte F, G, H, F', G', H' also getheilt sind, daß

$$AF':DF'=1:\alpha,\ BG':DG'=1:\beta,\ CH':DH'=1:\gamma,$$

und

$$CE\ :BF\ =\beta:\gamma,\ CG\ :AG\ =\alpha:\gamma,\ BH\ :AH\ =\alpha:\beta$$

ist, wo α, β, γ beliebige Zahlen vorstellen, alsdann die geraden Linien FF', GG', HH' einander in einem und dem nämlichen Punkte schneiden müssen. Für den besondern Fall, daß $dc=ab$, also $d:a=b:c=d+b:a+c$ und $d:b=a:c=d+a:b+c$ ist, ergibt sich:

$$AF':DF'=CF:BF=JG:JG',$$

und

$$BG':DG'=CG:AG=JF:JF',$$

woher der 16. Saz in Legendre, Elémens de Géometrie, livre V. folgt.

§. 23.

Die vier Ebenen $F'G'H$, $F'GH$, $G'FH$, $H'FG$ schließen eine Pyramide ein, deren Inhalt gleich

$$16abcd\Pi:(1-2a)(1-2b)(1-2c)(1-2d)$$

ist, und deren Ecken in den geraden Linien JD, JA, JB, JC also liegen, daß ihre Abstände von den Ecken D, A, B, C sich zu ihren Abständen vom Punkte J verhalten, wie $1:2d$, $1:2a$, $1:2b$, $1:2c$. Ferner sind die Inhalte der Pyramiden $DF'G'H'$, $AF'GH$, $BG'FH$, $CH'FG$ der Reihe nach gleich

$$abc\Pi : (d+a)(d+b)(d+c), \quad dbc\Pi : (a+d)(a+b)(a+c),$$
$$dac\Pi : (b+d)(b+a)(b+c), \quad dab\Pi : (c+d)(c+a)(c+b),$$

der Inhalt des Octaeders $FF'GG'HH'$ gleich

$$2abcd\Pi : (d+a)(d+b)(d+c)(a+b)(a+c)(b+c),$$

und

$$\overline{FF'}^2 = (dbg' + acg + dch' + abh) : (b+a)(b+c) - daf' : (d+a)^2 - bcf : (b+c)^2,$$
$$\overline{GG'}^2 = (daf' + bcf + dch' + abh) : (d+a)(a+c) - dbg' : (d+b)^2 - acg : (a+c)^2,$$
$$\overline{HH'}^2 = (daf' + bcf + dbg' + acg) : (d+c)(a+b) - dch' : (d+c)^2 - abh : (a+b)^2,$$

folglich

$$(d+a)^2(b+c)^2\,\overline{FF'}^2 + (d+b)^2(a+c)^2\,\overline{GG'}^2 + (d+c)^2(a+b)^2\,\overline{HH'}^2 = \left\{\begin{array}{l} da(d+a)f' + db(d+b)g' + dc(d+c)h' \\ bc(b+c)f + ac(a+c)g + ab(a+b)h \\ -(a^2+b^2+c^2+d^2)(f'+g'+h'+f+g+h) \end{array}\right\}$$

§. 24.

Es seien durch den Punkt J zu den Seitenflächen der Pyramide ABCD parallele Ebenen gelegt, und die Inhalte der ebenen Dreiecke, welche in diesen von jenen ausgeschnitten werden, in gehöriger Ordnung durch A', B', C', D' bezeichnet, so ist

$$D' = (1-d)^2 D, \quad A' = (1-a)^2 A, \quad B' = (1-b)^2 B, \quad C' = (1-c)^2 C;$$

folglich

$$3 = \sqrt{D':D} + \sqrt{A':A} + \sqrt{B':B} + \sqrt{C':C}$$

§. 52.

Aus dem Punkte J seien auf die Seitenflächen der Pyramide ABCD senkrechte gerade Linien gefällt; so ist der Inhalt der Pyramide, welche die Fußpunkte dieser vier Senkrechten bestimmen, gleich

$$\frac{81\Pi^5}{4A^2B^2C^2D^2} = (abcD^2 + dbcA^2 + dacB^2 + dabC^2).$$

Zweiter Abschnitt.

Berechnung und Relationen einiger Dimensionen, welche zwei, drei und vier Punkte in Beziehung auf eine Urpyramide mit dieser bestimmen.

§. 26.

Es seien die den Ecken A, B, C, D der Urpyramide ABCD zugeordneten Coefficienten zweier beliebigen Punkte a, b, c, d des einen E und a′, b′, c′, d′ des anderen E′, ferner der Abstand EE′ gleich r, und die Winkel, welche die gerade Linie EE′ mit den Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ bildet, durch α, β, γ, α', β', γ' bezeichnet; so ist (E. 4.)

$$2r\cos\alpha'.\sqrt{f'} = (d + a' - d' - a)\,f' + (b' - b)\,(g' - h) + (c' - c)\,(h' - g),$$
$$2r\cos\beta'.\sqrt{g'} = (d + b' - d' - b)\,g' + (a' - a)\,(f' - h) + (c' - c)\,(h' - f),$$
$$2r\cos\gamma'.\sqrt{h'} = (d + c' - d' - c)\,h' + (a' - a)\,(f' - g) + (b' - b)\,(g' - f),$$
$$2r\cos\alpha.\sqrt{f} = (b + c' - b' - c)\,f + (d' - d)\,(g' - h') + (a' - a)\,(h - g),$$
$$2r\cos\beta.\sqrt{g} = (a + c' - a' - c)\,g + (d' - d)\,(f' - h') + (b' - b)\,(h - f),$$
$$2r\cos\gamma.\sqrt{h} = (a + b' - a' - b)\,h + (d' - d)\,(f' - g') + (c' - c)\,(g - f).$$

§. 27.

Sind α, β, γ, δ die Winkel, welche die gerade Linie EE′ mit den Ebenen DBC, DAC, DAB, ABC bildet, so ist (E. 6.)

$$rD\sin\delta = 3(d' - d)\,\Pi,$$
$$rA\sin\alpha = 3(a' - a)\,\Pi,$$
$$rB\sin\beta = 3(b' - b)\,\Pi,$$
$$rC\sin\gamma = 3(c' - c)\,\Pi.$$

§. 28.

Es seien durch die gerade Linie EE′ und jede Ecke der Pyramide ABCD Ebe-

nen gelegt, ferner die Inhalte der vier hierdurch entstandenen ebenen Dreiecke EE′A, EE′B, EE′C, EE′D durch A′, B′, C′, D′ und die Winkel, welche jene Ebenen mit den Seitenflächen der Pyramide ABC bilden, nämlich

der Winkel, den die Ebene EE′A mit der BCD bildet, durch α
" " " " " EE′B " " ACD " " β
" " " " " EE′C " " ABD " " γ
" " " " " EE′D " " ABC " " δ

bezeichnet, so ist

$$D' \cos \delta = (bc' - b'c)\, A \cos m - (ac' - a'c)\, B \cos n + (ab' - a'b)\, C \cos p\,,$$
$$A' \cos \alpha = (bc' - b'c)\, D \cos m - (dc' - d'c)\, B \cos p' + (db' - d'b)\, C \cos n'\,,$$
$$B' \cos \beta = (ac' - a'c)\, D \cos n - (dc' - d'c)\, A \cos p' + (da' - d'a)\, C \cos m'\,,$$
$$C' \cos \gamma = (ab' - a'b)\, D \cos p - (db' - d'b)\, A \cos n' + (da' - d'a)\, B \cos m'\,;$$

und also

$$DD' \cos \delta - AA' \cos \alpha + BB' \cos \beta - CC' \cos \gamma = o.$$

§. 29.

Die Inhalte der Pyramiden, welche die beiden Punkte E, E′ mit den Endpunkten jeder der Kanten

$$\sqrt{f},\ \sqrt{g},\ \sqrt{h},\ \sqrt{f'},\ \sqrt{g'},\ \sqrt{h}$$

bestimmen, seien

$$F,\ G,\ H,\ F',\ G',\ H',$$

so ist

$$F = (da' - d'a)\,\Pi \text{ und } F' = (bc' - b'c)\,\Pi\,,$$
$$G = (d'b - db')\,\Pi \qquad G' = (a'c - ac')\,\Pi\,,$$
$$H = (dc' - d'c)\,\Pi\,, \qquad H' = (ab' - a'b)\,\Pi\,;$$

folglich

$$(a' - a)\, F' + (b' - b)\, G' + (c' - c)\, H' = o\,,$$
$$(d' - d)\, F' + (b' - b)\, H + (c' - c)\, G = o\,,$$
$$(d' - d)\, G' + (a' - a)\, H - (c' - c)\, F = o\,,$$
$$(d' - d)\, H' + (a' - a)\, G + (b' - b)\, F = o\,;$$

und

$$FF' - GG' + HH' = o.$$

§. 30.

Es seien a, b, c, d; a′, b′, c′, d′; a″, b″, c″, d″ die Coefficienten der Ecken

eines ebenen Dreiecks EE'E'', dessen Inhalt gleich Δ sei, ferner $\alpha', \beta', \gamma', \alpha, \beta, \gamma$ die Winkel, welche die Ebene EE'E'' mit den Kanten $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h'}$ bildet; so ist, wenn

$$da' + d'a'' + d''a - d'a - d''a' - da'' = \mathfrak{A}',$$
$$db' + d'b'' + d''b - d'b - d''b' - db'' = \mathfrak{B}',$$
$$dc' + d'c'' + d''c - d'c - d''c' - dc'' = \mathfrak{C}',$$
$$bc' + b'c'' + b''c - b'c - b''c' - bc'' = \mathfrak{A},$$
$$ac' + a'c'' + a''c - a'c - a''c' - ac'' = \mathfrak{B},$$
$$ab' + a'b'' + a''b - a'b - a''b' - ab'' = \mathfrak{C}$$

gesetzt wird,

$$\Delta \sin \alpha' . \sqrt{f'} = 3\mathfrak{A}\Pi, \qquad \Delta \sin \alpha . \sqrt{f} = 3\mathfrak{A}'\Pi,$$
$$\Delta \sin \beta' . \sqrt{g'} = 3\mathfrak{B}\Pi, \qquad \Delta \sin \beta . \sqrt{g} = 3\mathfrak{B}'\Pi,$$
$$\Delta \sin \gamma' . \sqrt{h'} = 3\mathfrak{C}\Pi, \qquad \Delta \sin \gamma . \sqrt{h} = 3\mathfrak{C}'\Pi.$$

§. 31.

Wenn $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Winkel vorstellen, welche die Ebene EE'E'' mit den Seitenflächen A, B, C, D der Pyramide bildet, so ist, wenn Alles wie im vorigen Paragraphen bleibt, (E. 5.)

$$\Delta \cos \delta = \mathfrak{A}\,A \cos m - \mathfrak{B}\,B \cos n + \mathfrak{C}\,C \cos p,$$
$$\Delta \cos \alpha = \mathfrak{A}\,D \cos m - \mathfrak{C}'B \cos p' + \mathfrak{B}'C \cos n',$$
$$\Delta \cos \beta = \mathfrak{B}\,D \cos n - \mathfrak{C}'A \cos p' + \mathfrak{A}'C \cos m',$$
$$\Delta \cos \gamma = \mathfrak{C}\,D \cos p - \mathfrak{B}'A \cos n' + \mathfrak{A}'B \cos m'.$$

§. 32.

Es seien die Inhalte der dreieckigen Pyramiden EE'E''A, EE'E''B, EE'E''C, EE'E''D durch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ bezeichnet; so ist (E. 3).

$$-\mathfrak{D} = (ab'c'' + a'b''c + a''bc' - ab''c' - a'bc'' - a''b'c)\,\Pi,$$
$$\mathfrak{A} = (db'c'' + d'b''c + d''bc' - db''c' - d'bc'' - d''b'c)\,\Pi,$$
$$-\mathfrak{B} = (da'c'' + d'a''c + d''ac' - da''c' - d'ac'' - d''a'c)\,\Pi,$$
$$\mathfrak{C} = (da'b'' + d'a''b + d''ab' - da''b' - d'ab'' - d''a'b)\,\Pi;$$

woher

$$d\,\mathfrak{D} + a\,\mathfrak{A} + b\,\mathfrak{B} + c\,\mathfrak{C} = o,$$
$$d'\mathfrak{D} + a'\mathfrak{A} + b'\mathfrak{B} + c'\mathfrak{C} = o,$$
$$d''\mathfrak{D} + a''\mathfrak{A} + b''\mathfrak{B} + c''\mathfrak{C} = o$$

folgt.

§. 33.

Es seien die den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten vierer beliebigen Punkte

$d\,,\ a\,,\ b\,,\ c$ des Punkts D',
$d',\ a',\ b',\ c'$ „ „ A',
$d'',\ a'',\ b'',\ c''$ „ „ B',
$d''',\ a''',\ b''',\ c'''$ „ „ C',

so schneiden (E. 3) die geraden Linien

DD', AA' einander, wenn $b\,c' = b'\,c$ ist,
DD', BB' „ „ $a\,c'' = a''\,c$ „,
DD', CC' „ „ $a\,b''' = a'''\,b$ „,
AA', BB' „ „ $d'\,c'' = d''\,c'$ „,
AA', CC' „ „ $d'\,b''' = d'''\,b'$ „,
BB', CC' „ „ $d''\,a''' = d'''\,a''$ „,

welche sechs Bedingungen zugleich statt finden, wenn die geraden Linien AA', BB', CC', DD' alle einander in einem und dem nämlichen Punkte schneiden.

§. 34.

Fallen die Punkte D', A', B', C' in die Seitenflächen der Pyramide DABC, nämlich D' in ABC, A' in DBC, B' in DAC, C' in DAB; so ist $d = 0$, $a' = 0$, $b'' = 0$, $c''' = 0$; folglich, wenn $\mathfrak{P}$ den Inhalt der Pyramide $D'A'B'C'$ vorstellt, (E. 3)

$$\mathfrak{P} : \Pi =$$
$$a''b'''c' + a'''b'c'' - a\,(b'''c' + b'c'' - b'''c'') - b\,(a'''c'' + a''c' - a'''c') - c\,(a''b''' + a'''b' - a''b') =$$
$$d''b'''c + d'''b\,c'' - d'\,(b'''c + b\,c'' - b'''c'') - b'\,(d'''c'' + d''c - d'''c) - c'\,(d''b''' + d'''b - d''b) =$$
$$d'\,a'''c + d'''a\,c' - d''\,(a'''c + a\,c' - a'''c') - a''\,(d'''c' + d'\,c - d'''c) - c''\,(d'\,a''' + d'''a - d'\,a) =$$
$$d'\,a''\,b + d''\,a\,b' - d'''(a''\,b + a\,b' - a''\,b') - a'''(d''b' + d'b - d''\,b) - b'''(d'\,a'' + d''\,a - d'\,a).$$

Für den besondern Fall aber, daß die geraden Linien DD', AA', BB', CC' einander in einem und dem nämlichen Punkte schneiden, ist aus dem vor. §.

$$\mathfrak{P} : \Pi = a''b'''c' + a'''b'c'' - a\,b'''c'' - a'''b\,c' - a''b'c$$
$$= d''b'''c + d'''b\,c'' - d'\,b'''c'' - d'''b'\,c - d''b\,c'$$
$$= d'\,b'''c + d'''a\,c' - d''\,a'''c' - d'''a''\,c - d'\,a\,c''$$
$$= d'\,b\,c'' + d''a\,b' - d'''a''\,b' - d''a'''b - d'\,a\,b'''.$$

Sind z. B. die Punkte D', A', B', C' die Mittelpunkte der, in die Seitenflächen ABC, DBC, DAC, DAB beschriebenen Kreise; so ist aus den obigen Werthen von $\mathfrak{P}$ der Inhalt der Pyramide $A'B'C'D'$ gleich

$$\frac{2\sqrt{ff'gg'} + 2\sqrt{ff'hh'} + 2\sqrt{gg'hh'} - ff' - gg' - hh'}{(\sqrt{f}+\sqrt{g}+\sqrt{h})(\sqrt{f}+\sqrt{g'}+\sqrt{h'})(\sqrt{g}+\sqrt{f'}+\sqrt{h'})(\sqrt{h}+\sqrt{f'}+\sqrt{g'})}$$

§. 35.

Es seien die Schwerpunkte der Seitenflächen D, A, B, C durch G, G′, G″, G‴, die Mittelpunkte der um sie beschriebenen Kreise durch U, U′, U″, U‴, die Mittelpunkte der in sie beschriebenen Kreise durch V, V′, V″, V‴, die Durchschnittspunkte ihrer Perpendikel durch M, M′, M″, M‴, ferner die Mittelpunkte der Kreise, welche durch die Fußpunkte der drei Perpendikel einer jeden dieser Seitenflächen gehen, durch W, W′, W″, W‴, und endlich die, den Ecken A, B, C; D, B, C; D, A, C; D, A, B gegenüber liegenden Abstände der Fußpunkte dieser Perpendikel von einander, der Ordnung nach durch d', d'', d'''; a, a'', a'''; b, b', b'''; c, c', c'' bezeichnet; so schneiden bekanntlich die geraden Linien DG, AG′, BG″, CG‴ einander im Schwerpunkte des körperlichen Raumes der Pyramide DABC. Aus §. 31 aber ergeben sich noch folgende Säze: Wenn

1. die geraden Linien DV, AV′, BV″, CV‴,
2. „ „ „ DM, AM′, BM″, CM‴,
3. „ „ „ DU, AU′, BU″, CU‴,
4. „ „ „ DW, AW′, BW″, CW‴

einen gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt haben, so ist im 1ten Falle $ff' = gg' = hh'$, im 2ten Falle $f + f' = g + g' = h + h'$, im 3ten Falle

$$a''d''' = a'''d'',\ b'd''' = b'''d',\ c'd'' = c''d',$$
$$b\,c' = b'\,c,\ a\,c'' = a''\,c,\ a\,b''' = a'''b,$$

und im 4ten Falle

$$(d'+d'')(a+a''')=(d'+d''')(a+a''),\quad (b'+b''')(c+c'')=(b+b''')(c'+c''),$$
$$(d'+d'')(b+b''')=(d''+d''')(b+b'),\quad (a''+a''')(c+c')=(a+a''')(c'+c''),$$
$$(d'+d''')(c+c'')=(d''+d''')(c+c'),\quad (a''+a''')(b+b')=(a+a'')(b'+b''').$$

§. 36.

Es seien r der Halbmesser der, in die Pyramide DABC beschriebenen, Kugel, und ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' die Halbmesser derjenigen Kugeln, deren Oberflächen der Reihe nach die Seitenflächen D, A, B, C selbst außerhalb der Pyramide und zugleich die Ausdehnungen jeder der drei übrigen Seitenflächen berühren, ferner die Mittelpunkte der Kugeln r, ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' durch J, L, L′, L″, L‴ bezeichnet; so sind jene

Halbmesser $r = 3\Pi : (D + A + B + C)$, $\varrho = 3\Pi : (A + B + C - D)$, $\varrho' = 3\Pi : (D + B + C - A)$, $\varrho'' = 3\Pi : (D + A + C - B)$, $\varrho''' = 3\Pi : (D + A + B - C)$, und die den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten des Punkts J $D : \Delta$, $A : \Delta$, $B : \Delta$, $C : \Delta$, wo $\Delta = D + A + B + C$ gesetzt ist. Setzt man in diesen jedes der D, A, B, C nach und nach negativ, so hat man die Coefficienten der übrigen Mittelpunkte L, L′, L″, L‴. Hieraus ergeben sich (E. 3.) die Inhalte der Pyramiden JL′L″L‴, JLL″L‴, JLL′L‴, JLL′L″, LL′L″L‴ gleich

$$8ABCD\Pi : (A+B+C+D)(D-A+B+C)(D+A-B+C)(D+A+B-C),$$
$$8ABCD\Pi : (A+B+C+D)(A+B+C-D)(D+A-B+C)(D+A+B-C),$$
$$8ABCD\Pi : (A+B+C+D)(A+B+C-D)(D-A+B+C)(D+A+B-C),$$
$$8ABCD\Pi : (A+B+C+D)(A+B+C-D)(D-A+B+C)(D+A-B+C),$$
$$16ABCD\Pi : (A+B+C-D)(A+B+D-C)(A+C+D-B)(B+C+D-A).$$

Auch ist, wenn Δ, Δ', Δ'', Δ''' die Inhalte der ebenen Dreiecke L′L″L‴, LL″L‴, LL′L‴, LL′L″ vorstellen, das neunfache Quadrat vom Inhalte der Pyramide LL′L″L‴ gleich

$$\varrho^2\Delta^2 + \varrho'^2\Delta'^2 + \varrho''^2\Delta''^2 + \varrho'''^2\Delta'''^2.$$

Die Halbmesser der übrigen berührenden Kugeln, deren jede die Ausdehnungen aller vier Seitenflächen der Pyramide außerhalb derselben berührt, sind durch die Ausdrücke $3\Pi : (D + A - B - C)$, $3\Pi : (D + B - A - C)$, $3\Pi : (D + C - A - B)$, vorgestellt, und kommen in diejenigen sechs Räume außerhalb der Pyramide zu liegen, welche die Ausdehnungen je zweier Seitenflächen durch ihre gemeinschaftliche Kante mit den Ausdehnungen der beiden übrigen Seitenflächen bestimmen. Diese sechs, den Kanten $\sqrt{f}$, $\sqrt{g}$, $\sqrt{h}$, $\sqrt{f'}$, $\sqrt{g'}$, $\sqrt{h'}$ anliegenden Räume seien durch F, G, H, F′, G′, H′ bezeichnet; so liegt die erste Kugel im Raume F oder F′, je nachdem $D+A$ kleiner oder größer als $B+C$, die zweite im Raume G oder G′, je nachdem $D+B$ kleiner oder größer als $A+C$, und die dritte im Raume H oder H′, je nachdem $D+C$ kleiner oder größer als $A+B$ ist. Wenn aber $D+A=B+C$ ist, so liegt in jedem der Räume F, F′ eine unendlich große Kugel. Ein Gleiches gilt für die Räume G, G′; H, H′, wenn $D+B=A+C$, $D+C=B+A$ ist.

§. 37.

Es seien δ', δ'', δ''', α, α'', α''', β, β', β''', γ, γ', γ'' die Größen der Kantenwinkel BDC, ADC, ADB; BAC, DAC, DAB; ABC, DBC, DBA; ACB, DCB, DCA, ferner

$$A^2f' + B^2g' + C^2h' + 2AB\sqrt{f'g'}\cos\delta''' + 2AC\sqrt{f'h'}\cos\delta'' + 2BC\sqrt{g'h'}\cos\delta' = \mathfrak{D}^2$$
$$D^2f' + B^2h + C^2g + 2DB\sqrt{f'h}\cos\alpha''' + 2DC\sqrt{f'g}\cos\alpha'' + 2BC\sqrt{hg}\cos\alpha = \mathfrak{A}^2$$
$$D^2g' + A^2h + C^2f + 2DA\sqrt{g'h}\cos\beta''' + 2DC\sqrt{g'f}\cos\beta' + 2AC\sqrt{hf}\cos\beta = \mathfrak{B}^2$$
$$D^2h' + A^2g + B^2f + 2DA\sqrt{h'g}\cos\gamma'' + 2DB\sqrt{h'f}\cos\gamma' + 2AB\sqrt{fg}\cos\gamma = \mathfrak{C}^2$$

und $A + B + C + D = \Delta$ gesetzt, so sind die Abstände des Mittelpunkts J von den Ecken der Pyramide

$$\overline{JA} = \mathfrak{A} : \Delta,\quad \overline{JB} = \mathfrak{B} : \Delta,\quad \overline{JC} = \mathfrak{C} : \Delta,\quad \overline{JD} = \mathfrak{D} : \Delta,$$

ferner die, den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten der Berührungspunkte der Oberfläche der einbeschriebenen Kugel r mit den Seitenflächen D, A, B, C der Pyramide

$$\begin{array}{llll}
0, & 2A\cos\tfrac{1}{2}m^2 : \Delta, & 2B\cos\tfrac{1}{2}n^2 : \Delta, & 2C\cos\tfrac{1}{2}p^2 : \Delta \\
2D\cos\tfrac{1}{2}m^2 : \Delta, & 0, & 2B\cos\tfrac{1}{2}p'^2 : \Delta, & 2C\cos\tfrac{1}{2}n'^2 : \Delta \\
2D\cos\tfrac{1}{2}n^2 : \Delta, & 2A\cos\tfrac{1}{2}p'^2 : \Delta, & 0, & 2C\cos\tfrac{1}{2}m'^2 : \Delta \\
2D\cos\tfrac{1}{2}p^2 : \Delta, & 2A\cos\tfrac{1}{2}n'^2 : \Delta, & 2B\cos\tfrac{1}{2}m'^2 : \Delta, & 0;
\end{array}$$

die Inhalte der ebenen Dreiecke, welche je drei dieser vier Berührungspunkte bestimmen,

$$3r^2\Pi\mathfrak{D} : 4ABC;\quad 3r^2\Pi\mathfrak{A} : 4DBC;\quad 3r^2\Pi\mathfrak{B} : 4DAC;\quad 3r^2\Pi\mathfrak{C} : 4DAB$$

und der Inhalt der Pyramide, welche diese vier Berührungspunkte bestimmen, gleich

$$9\Pi^3r^2 : 4ABCD.$$

§. 37.

Wenn die, in die Pyramide $ABCD$ beschriebene, Kugel die Grundfläche ABC derselben in ihrem Schwerpunkte berührt, so muß sein

$$\left.\begin{array}{l}
(h + 3h' - g - 3g')D - 2(h - g)A + (3f + h - g)B - (3f + g - h)C = 0 \\
(h + 3h' - f - 3f')D - 2(h - f)B + (3g + h - f)A - (3g + f - h)C = 0 \\
(g + 3g' - f - 3f')D - 2(g - f)C + (3h + g - f)A - (3h + f - g)B = 0
\end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{l}
D - 2A + B + C = 3A\cos m \\
D - 2B + A + C = 3B\cos n \\
D - 2C + A + B = 3C\cos p
\end{array}\right\} \quad (2)$$

Setzt man $A + B + C + D = \Delta$, so ist weiter

$$\cos\tfrac{1}{2}m = \sqrt{\Delta : 6A},\quad \cos\tfrac{1}{2}n = \sqrt{\Delta : 6B},\quad \cos\tfrac{1}{2}p = \sqrt{\Delta : 6C} \quad (3)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\cos\tfrac{1}{2}m' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta(D + 3A - 3B - 3C) : 3BC}, \\
\cos\tfrac{1}{2}n' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta(D + 3B - 3A - 3C) : 3AC}, \\
\cos\tfrac{1}{2}p' = \tfrac{1}{2}\sqrt{\Delta(D + 3C - 3A - 3B) : 3AB},
\end{array}\right\} \quad (4)$$

folglich

$$f : g : h = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}m : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}n : \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}p \qquad (5)$$

und, wenn $T = (\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})(\sqrt{A} + \sqrt{B} - \sqrt{C})(\sqrt{A} + \sqrt{C} - \sqrt{B})(\sqrt{B} + \sqrt{C} - \sqrt{A})$ ist,

$$81\Pi^2 = \Delta D\sqrt{3}\,\sqrt{\Delta(D - 3A - 3B - 3C) + 12T} \qquad (6)$$

Auch können in diesem Falle alle übrigen Dimensionen der Pyramide aus den Inhalten ihrer vier Seitenflächen berechnet werden.

§. 38.

Es seien D', A', B', C' die Fußpunkte der, aus den Ecken D, A, B, C auf die gegenüber liegenden Seitenflächen gefällten Perpendikel; $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ der Ordnung nach die Quadrate der Abstände $B'C'$, $A'C'$, $A'B'$, $D'A'$, $D'B'$, $D'C'$ und φ, ψ, χ die Größen der Winkel, welche die drei Paare gegenüberliegender Kanten BC, DA; AC, DB; AB, DC bilden; so sind die den Ecken D, A, B, C zugeordneten Coefficienten jener Fußpunkte D', A', B', C'

$$\begin{array}{llll}
o, & A\cos m : D, & B\cos n : D, & C\cos p : D, \\
D\cos m : A, & o, & B\cos p' : A, & C\cos n' : A, \\
D\cos n : B, & A\cos p' : B, & o, & C\cos m' : B, \\
D\cos p : C, & A\cos n' : C, & B\cos m' : C, & o,
\end{array}$$

ferner

$$\begin{array}{ll}
\alpha' = f'(1 - \sin\varphi^2 \sin m^2), & \alpha = f(1 - \sin\varphi^2 \sin m'^2), \\
\beta' = g'(1 - \sin\psi^2 \sin n^2), & \beta = g(1 - \sin\psi^2 \sin n'^2), \\
\gamma' = h'(1 - \sin\chi^2 \sin p^2), & \gamma = h(1 - \sin\chi^2 \sin p'^2),
\end{array}$$

$$DA\sqrt{\alpha' - f'} = BC\sqrt{\alpha - f},$$
$$DB\sqrt{\beta' - g'} = AC\sqrt{\beta - g},$$
$$DC\sqrt{\gamma' - h'} = AB\sqrt{\gamma - h},$$

und der Inhalt der Pyramide $A'B'C'D'$ gleich

$$\frac{3\Pi}{2}\left\{\frac{3}{2}\left(\frac{\Pi}{ABCD}\right)^2\left[\begin{matrix} D^2A^2f' + D^2B^2g' + D^2C^2h' \\ B^2C^2f + A^2C^2g + A^2B^2h \end{matrix} - 9\Pi^2(A^2+B^2+C^2+D^2)\right] - 2\right\}$$

§. 39.

Bezeichnet man die kürzesten Abstände jener Perpendikel von einander, nämlich

der DD′, AA′; DD′, BB′; DD′, CC′; BB′, CC′; AA′, CC′; AA′, BB′ durch a', b', c', a, b, c; so ist

$$a'\sqrt{f} = a\sqrt{f'} = \tfrac{1}{2}(h + h' - g - g') = \cos\phi . \sqrt{ff'}$$
$$b'\sqrt{g} = b\sqrt{g'} = \tfrac{1}{2}(h + h' - f - f') = \cos\psi . \sqrt{gg'}$$
$$c'\sqrt{h} = c\sqrt{h'} = \tfrac{1}{2}(g + g' - f - f') = \cos\chi . \sqrt{hh'}$$

§. 40.

Für den besondern Fall, daß $\cos\phi = \cos\psi = \cos\chi = 0$, und also die gegenüber liegenden Kanten der Pyramide ABCD mit einander rechte Winkel bilden, schneiden die aus den Ecken der Pyramide auf die gegenüber liegenden Seitenflächen gefällten Perpendikel DD′, AA′, BB′, CC′ einander in einem und dem nämlichen Punkte, welcher O heiße. Die Fußpunkte D′, A′, B′, C′ dieser Perpendikel fallen alsdann in die Durchschnittspunkte der Perpendikel der Seitenflächen. Auch sind die drei Abstände der Mitten je zweier gegenüber liegender Kanten von einander gleich, und $f + f' = g + g' = h + h' = 4k$, wo k das Quadrat vom Abstand der Mitte irgend einer Kante von der Mitte der gegenüber liegenden vorstellt. Hier folgen fernere Eigenschaften dieser merkwürdigen Pyramide.

§. 41.

Es seien R der Halbmesser der um diese Pyramide DABC beschriebenen Kugel, u, u', u'', u''' die Halbmesser der um die Seitenflächen ABC, DBC, DAC, DAB beschriebenen Kreise, w, w', w'', w''' die Halbmesser derjenigen Kreise, welche durch die Fußpunkte der Perpendikel einer jeden dieser Seitenflächen gehen, und

$$2d = 8k - f - g - h = f' + g' + h' - 4k = f' + g' - h = f' + h' - g = g' + h' - f,$$
$$2a = 8k - f - g' - h' = f' + g + h - 4k = f' + g - h' = f' + h - g' = g + h - f,$$
$$2b = 8k - g - f' - h' = g' + f + h - 4k = f + g' - h' = h + g' - f' = f + h - g,$$
$$2c = 8k - h - f' - g' = h' + f + g - 4k = f + h' - g' = g + h' - f' = g + f - h$$

gesetzt, so daß also $d + a = f'$, $d + b = g'$, $d + c = h'$, $b + c = f$, $a + c = g$, $a + b = h$, und $a + b + c + d = 4k$ ist; so gelten folgende Säze:

(1) $4k = \overline{DD'}^2 + 4u^2 = \overline{AA'}^2 + 4u'^2 = \overline{BB'}^2 + 4u''^2 = \overline{CC'}^2 + 4u'''^2$,

(2) $DD' . DO = d$, $AA' . AO = a$, $BB' . BO = b$, $CC' . CO = c$,

(3) $DD' . OD' = 2uw$, $AA' . OA' = 2u'w'$, $BB' . OB' = 2u''w''$, $CC' . OC' = 2u'''w'''$,

(4) $\overline{DD'}^2 = d + 2uw$, $\overline{AA'}^2 = a + 2u'w'$, $\overline{BB'}^2 = b + 2u''w''$, $\overline{CC'}^2 = c + 2u'''w'''$,

(5) $\overline{OD'}^2 = R^2 - k + d$, $\overline{OA'}^2 = R^2 - k + a$, $\overline{OB'}^2 = R^2 - k + b$, $\overline{OC'}^2 = R^2 - k + c$,

(6) $$OD . OD' = OA . OA' = OB . OB' = OC . OC' = k - R^2,$$

(7) $$OD . DD' + OA . AA' + OB . BB' + OC . CC' = 4k,$$

(8) $$OD : DD' + OA : AA' + OB : BB' + OC : CC' = 3,$$

(9) $$\overline{OD}^2 + \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2 + \overline{OC}^2 = 4R^2,$$

(10) $$D'A' . B'C' : D'B' . A'C' : D'C' . A'B' = DA . BC : DB . AC : DC . AB.$$

(11) Der Halbmesser der, um die Pyramide $A'B'C'D'$ beschriebenen Kugel ist gleich einem Drittel vom Halbmesser R der um die Pyramide ABCD beschriebenen Kugel.

§. 42.

Es sei Q der Schwerpunkt (des körperlichen Raumes) der Pyramide ABCD, und U der Mittelpunkt der Kugel ABCD, so ist

$$4\overline{QO}^2 = 4\overline{QU}^2 = \overline{OU}^2 = 4R^2 - 3k,$$

woher der Saz folgt:

Der Schwerpunkt der Pyramide ABCD ist die Mitte der geraden Linie, welche aus dem Mittelpunkte der um sie beschriebenen Kugel an den Durchschnittspunkt ihrer vier Perpendikel gezogen ist.

Ist J der Mittelpunkt der in die Pyramide ABCD beschriebenen Kugel, deren Halbmesser v sei, so ist

$$\overline{JO}^2 = 3v^2 + R^2 - k,$$

ferner

$$\overline{JD}^2 = d + v(3v - 2OD),$$
$$\overline{JA}^2 = a + v(3v - 2OA),$$
$$\overline{JB}^2 = b + v(3v - 2OB),$$
$$\overline{JC}^2 = c + v(3v - 2OC),$$
$$\overline{JD}^2 + \overline{JA}^2 + \overline{JB}^2 + \overline{JC}^2 = 4\overline{JQ}^2 + 3k,$$

und

$$4\,\overline{QD}^2 = k + 2d,\ 4\,\overline{QA}^2 = k + 2a,\ 4\,\overline{QB}^2 = k + 2b,\ 4\,\overline{QC}^2 = k + 2c;$$
$$\overline{UD'}^2 = R^2 - 4uw,\ \overline{UA'}^2 = R^2 - 4u'w',\ \overline{UB'}^2 = R^2 - 4u''w'',\ \overline{UC'}^2 = R^2 - 4u'''w''';$$
$$4\,\overline{QD'}^2 = k - 4uw,\ 4\,\overline{QA'}^2 = k - 4u'w',\ 4\,\overline{QB'}^2 = k - 4u''w'',\ 4\,\overline{QC'}^2 = k - 4u'''w''';$$

$$4\overline{D'Q}^2 - \overline{D'U}^2 = 4\overline{A'Q}^2 - \overline{A'U}^2 = 4\overline{B'Q}^2 - \overline{B'U}^2 = 4\overline{C'Q}^2 - \overline{C'U}^2 = k - R^2,$$

$$\overline{UD'}^2 + 2OD'.DD' = \overline{UA'}^2 + OA'.AA' = \overline{UB'}^2 + 2OB'.BB' = \overline{UC'}^2 + 2OC'.CC' = R^2,$$

und, wenn i, i', i'', i''' die Mittelpunkte der, den Halbmessern u, u', u'', u''' zugehörigen, Kreise vorstellen,

$$2Ui = OD - OD', \quad 2Ui' = OA - OA', \quad 2Ui'' = OB - OB', \quad 2Ui''' = OC - OC'.$$

§. 43.

Jede der Pyramiden OABC, ODBC, ODAC, ODAB ist von derselben Art, wie die vorliegende ABCD, und die Durchschnittspunkte der vier Perpendikel jeder fallen der Reihe nach in die Ecken D, A, B, C. Sind nun $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}'$, $\mathfrak{R}''$, $\mathfrak{R}'''$ die Halbmesser der, um diese Pyramiden beschriebenen, Kugeln OABC, ODBC, ODAC, ODAB; so ist

$$\begin{aligned} 4\mathfrak{R}^2 &= R^2 + 3k + 3d, \\ 4\mathfrak{R}'^2 &= R^2 + 3k + 3a, \\ 4\mathfrak{R}''^2 &= R^2 + 3k + 3b, \\ 4\mathfrak{R}'''^2 &= R^2 + 3k + 3c, \end{aligned}$$

folglich

$$\mathfrak{R}^2 + \mathfrak{R}'^2 + \mathfrak{R}''^2 + \mathfrak{R}'''^2 = R^2 + 6k,$$

und

$$\begin{aligned} 2R^2 + 30k &= 8\mathfrak{R}^2 + 3(f + g + h) \\ &= 8\mathfrak{R}'^2 + 3(f + g' + h') \\ &= 8\mathfrak{R}''^2 + 3(f' + g + h') \\ &= 8\mathfrak{R}'''^2 + 3(f' + g' + h). \end{aligned}$$

§. 44.

Die Mittelpunkte der Kugeln OABC, ODBC, ODAC, ODAB seien p, p', p'', p''', so schneiden die vier geraden Linien Dp, Ap', Bp'', Cp''' einander in einem und dem nämlichen Punkte, welcher in der geraden Linie OQ also liegt, daß er von O viermal weiter absteht, als von Q. Ferner ist die Pyramide, welche diese vier Mittelpunkte p, p', p'', p''' bestimmen, der vorliegenden ähnlich. Es ist nämlich $pp' : DA = pp'' : DB = pp''' : DC = p''p''' : BC = p'p''' : AC = p'p'' : AB = 3 : 2$, und die Kanten jener Pyramide sind parallel mit den Kanten dieser. Auch fällt der Durchschnittspunkt der Perpendikel der Pyramide $pp'p''p'''$ in den Mittelpunkt U der um die Pyramide ABCD beschriebenen Kugel. Ferner ist

$$OD : Up = OA : Up' = OB : Up'' = OC : Up''' = 2 : 3,$$

$$4\overline{pQ}^2 = R^2 + 6d,\ 4\overline{p'Q}^2 = R^2 + 6a,\ 4\overline{p''Q}^2 = R^2 + 6b,\ 4\overline{p'''Q}^2 = R^2 + 6c;$$

$$\overline{pQ}^2 + \overline{p'Q}^2 + \overline{p''Q}^2 + \overline{p'''Q}^2 = R^2 + 6k,$$

$$4\overline{pD}^2 = R^2 + 3k + 15d,$$

$$4\overline{p'A}^2 = R^2 + 3k + 15a,$$

$$4\overline{p''B}^2 = R^2 + 3k + 15b,$$

$$4\overline{p'''C}^2 = R^2 + 3k + 15c,$$

$$2\overline{pD}^2 = 2\mathfrak{R}^2 + 3d,\ 2\overline{p'A}^2 = 2\mathfrak{R}'^2 + 3a,\ 2\overline{p''B}^2 = 2\mathfrak{R}''^2 + 3b,\ 2\overline{p'''C}^2 = 2\mathfrak{R}'''^2 + 3c,$$

$$\overline{pD}^2 + \overline{p'A}^2 + \overline{p''B}^2 + \overline{p'''C}^2 = R^2 + 18k.$$

§. 45.

Die Schwerpunkte der Pyramiden OABC, ODBC, ODAC, ODAB seien q, q', q'', q''', so schneiden die vier geraden Linien Dq, Aq', Bq'', Cq''' einander in einem und dem nämlichen Punkte, und die Pyramide, welche diese vier Schwerpunkte q, q', q'', q''' bestimmen, ist der vorliegenden ABCD ähnlich. Es ist nämlich $qq' : DA = qq'' : DB = qq''' : DC = q''q''' : BC = q'q''' : AC = q'q'' : AB = 1 : 4$ und die Kanten jener Pyramide sind parallel mit den Kanten dieser. Ferner gehören folgende Säze hierher

1. Der Durchschnittspunkt der Perpendikel der Pyramide qq'q''q''' fällt in den Schwerpunkt der Pyramide ABCD.

2. Der Mittelpunkt der um die Pyramide qq'q''q''' beschriebenen Kugel liegt im Schwerpunkte der Pyramide pp'p''p''' (s. d. vor. §.)

3. Der Schwerpunkt der Pyramide qq'q''q''' liegt in der geraden Linie OU also, daß er von U dreimal weiter entfernt ist, als von O.

$$R^2 + 5k = 16\overline{qD}^2 - 15d = 16\overline{q'A}^2 - 15a = 16\overline{q''B}^2 - 15b = 16\overline{q'''C}^2 - 15c,$$

$$qD : pD = q'A : p'A = q''B : p''B = q'''C : p'''C = 1 : 2,$$

$$9R^2 - 5k = 16\overline{qO}^2 + d = 16\overline{q'O}^2 + a = 16\overline{q''O}^2 + b = 16\overline{q'''O}^2 + c,$$

$$\overline{qO}^2 + \overline{q'O}^2 + \overline{q''O}^2 + \overline{q'''O}^2 = \tfrac{3}{4}(3R^2 - 2k),$$

$$qQ : pU = q'Q : p'U = q''Q : p''U = q'''Q : p'''U = 1 : 6,$$

$$qQ : OD = q'Q : OA = q''Q : OB = q'''Q : OC = 1 : 4,$$

$$25R^2 - 21k = 16\overline{qU}^2 - 3d = 16\overline{q'U}^2 - 3a = 16\overline{q''U}^2 - 3b = 16\overline{q'''U}^2 - 3c,$$
$$\overline{qU}^2 + \overline{q'U}^2 + \overline{q''U}^2 + \overline{q'''U}^2 = \tfrac{25}{4}R^2 - \tfrac{9}{2}k.$$

§. 46.

Aus dem Durchschnittspunkt O aller Perpendikel der Pyramide ABCD seien auf ihre Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC senkrechte gerade Linien gefällt, deren Fußpunkte der Ordnung nach F, G, H, F′, G′, H′ heißen; so sind diese Fußpunkte zugleich die Fußpunkte der Perpendikel der Seitenflächen der Pyramide ABCD, und die Punkte O, F, F′ liegen in gerader Linie, eben so auch die O, G, G′ und O, H, H′; so daß also die geraden Linien FF′, GG′, HH′ die kürzesten Abstände je zweier einander gegenüber liegender Kanten der Pyramide ABCD sind. Beschreibt man nun aus dem Schwerpunkte der Pyramide ABCD mit einem Halbmesser gleich $\frac{1}{2}\sqrt{k}$ eine Kugel, so geht ihre Oberfläche durch die Mitte jeder Kante der Pyramide und auch durch jeden der Fußpunkte F, G, H, F′, G′, H′. Auch ist

$$FF' = 6\Pi : \sqrt{ff'},\ GG' = 6\Pi : \sqrt{gg'},\ HH' = 6\Pi : \sqrt{hh'},$$
$$\overline{UF'}^2 = R^2 - da : f',\ \overline{UG'}^2 = R^2 - db : g',\ \overline{UH'}^2 = R^2 - dc : h',$$
$$\overline{UF}^2 = R^2 - bc : f,\ \overline{UG}^2 = R^2 - ac : g,\ \overline{UH}^2 = R^2 - ab : h,$$
$$2R^2 = \overline{UF}^2 + \overline{UF'}^2 + \overline{FF'}^2 = \overline{UG}^2 + \overline{UG'}^2 + \overline{GG'}^2 = \overline{UH}^2 + \overline{UH'}^2 + \overline{HH'}^2,$$
$$OF \,.\, OF' = OG \,.\, OG' = OH \,.\, OH' = k - R^2,$$
$$\sqrt{ff'} : \sqrt{gg'} : \sqrt{hh'} = G'H' : F'H' : F'G' = GH : F'H : F'G$$
$$= G'H : FH : G'F = H'G : H'F : FG.$$

Ferner ist der Inhalt des Octaeders FF′GG′HH′ gleich

$$2592\Pi^5 : ff'gg'hh',$$

und die Flächeninhalte der ebenen Vierecke GG′HH′, FF′HH′, FF′GG′ sind

$$216\Pi^3\sqrt{k} : gg'hh',\quad 216\Pi^3\sqrt{k} : ff'hh',\quad 216\Pi^3\sqrt{k} : ff'gg'.$$

§. 47.

Die Mittelpunkte der um die ebenen Vierecke GG′HH′, FF′HH′, FF′GG′ beschriebenen Kreise seien J′, J″, J‴, und ihre Halbmesser r′, r″, r‴; so liegen die Punkte J′, J″, J‴ in denjenigen geraden Linien, welche durch die Mitten je zweier einander gegenüber liegenden Kanten der Pyramide ABCD gelegt sind; und zwar sind die Abstände des Punktes J′ von den Mitten der Kanten DA, BC gleich

$f' : 4\sqrt{k}$, $f : 4\sqrt{k}$, ferner die Abstände des Punkts J'' von den Mitten der Kanten DB, AC gleich $g' : 4\sqrt{k}$, $g : 4\sqrt{k}$, und die Abstände des Punkts J''' von den Mitten der Kanten DC, AB gleich $h' : 4\sqrt{k}$, $h : 4\sqrt{k}$. Die Werthe der Halbmesser der genannten Kreise aber sind

$$4r' = \sqrt{ff' : k}, \quad 4r'' + \sqrt{gg' : k}, \quad 4r''' = \sqrt{hh' : k}.$$

Ferner ist

$$QJ' = (f - f') : 8\sqrt{k}, \quad QJ'' = (g - g') : 8\sqrt{k}, \quad QJ''' = (h - h') : 8\sqrt{k},$$

$$\overline{QJ'}^2 + r'^2 = \overline{QJ''} + r''^2 = \overline{QJ'''}^2 + r'''^2 = \tfrac{1}{4}k;$$

$$\overline{J'D}^2 = f'(f + 4d) : 16k, \quad \overline{J''D}^2 = g'(g + 4d) : 16k, \quad \overline{J'''D}^2 = h'(h + 4d) : 16k,$$

$$\overline{J'A}^2 = f'(f + 4a) : 16k, \quad \overline{J''A}^2 = g(g' + 4a) : 16k, \quad \overline{J'''A}^2 = h(h' + 4a) : 16k,$$

$$\overline{J'B}^2 = f(f' + 4b) : 16k, \quad \overline{J''B}^2 = g'(g + 4b) : 16k, \quad \overline{J'''B}^2 = h(h' + 4b) : 16k,$$

$$\overline{J'C}^2 = f(f' + 4c) : 16k, \quad \overline{J''C}^2 = g(g' + 4c) : 16k, \quad \overline{J'''C}^2 = h'(h + 4c) : 16k;$$

$$\overline{OJ'}^2 - r'^2 = \overline{OJ''}^2 - r''^2 = \overline{OJ'''}^2 - r'''^2 = R^2 - k,$$

$$\overline{UJ'}^2 + 3r'^2 = \overline{UJ''}^2 + 3r''^2 = \overline{UJ'''}^2 + 3r'''^2 = R^2,$$

$$\overline{J''J'''}^2 + r''^2 + r'''^2 = \overline{J'J'''}^2 + r'^2 + r'''^2 = \overline{J'J''}^2 + r'^2 + r''^2 = r'^2 + r''^2 + r'''^2 - 36\Pi^2 : 16k^2$$

$$= (fgh + fg'h' + f'gh' + f'g'h) : 64k^2,$$

der Inhalt des ebenen Dreiecks, welches die drei Halbmesser r', r'', r''' zu Seiten hat, gleich $3\Pi R : 8k$, und der Inhalt der Pyramide $QJ'J''J''' = (f' - f)(g' - g)(h' - h) : 1024k^3$.

§. 48.

Es seien L, L', L'', L''' die, den Ebenen F'G'H', F'GH, G'FH, H'FG gegenüber liegenden Ecken der, von eben diesen Ebenen eingeschlossenen, dreieckigen Pyramide. Sie liegen in den, durch ihre Fußpunkte verlängerten, Perpendikeln DD', AA', BB', CC', und die Kanten LL', LL'', LL''', L'L''', L'L''', L'L'' treffen die Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC in den Punkten F, G, H, F' G', H' unter rechten Winkeln. Ferner ist O der Mittelpunkt der in die Pyramide LL'L''L''' beschriebenen Kugel, und, wenn r der Halbmesser dieser Kugel ist,

$$Rr = k - R^2 = abcd : 36\Pi^2.$$

Die Ecken D, A, B, C aber sind die Mittelpunkte derjenigen vier außerhalb berührenden Kugeln, deren jede eine Seitenfläche der Pyramide LL'L''L''' selbst

aber die Ausdehnungen der drei übrigen berührt, und es ist, wenn ϱ, ϱ', ϱ'', ϱ''' die Halbmesser dieser vier Kugeln bezeichnen,

$$2R\varrho = d, \quad 2R\varrho' = a, \quad 2R\varrho'' = b, \quad 2R\varrho''' = c,$$

folglich

$$\varrho + \varrho' + \varrho'' + \varrho''' = 2(r + R) = 2k : R,$$

und

$$2\varrho\varrho'\varrho''\varrho''' = r(\varrho'\varrho''\varrho''' + \varrho\varrho''\varrho''' + \varrho\varrho'\varrho''' + \varrho\varrho'\varrho'') = 9\Pi^2 r : 2R^3.$$

Die Mittelpunkte derjenigen drei außerhalb berührenden Kugeln aber, deren jede die Ausdehnungen aller vier Seitenflächen der Pyramide $LL'L''L'''$ berührt, liegen in den Verlängerungen der geraden Linien FF', GG', HH' und zwar also, daß

die Abstände des ersten von den Punkten F, F' sich verhalten, wie $bcf' : daf$,
" " " zweiten " " " G, G' " " " $acg' : dbg$,
" " " dritten " " " H, H' " " " $abh' : dch$.

§. 49.

Es sind die Abstände der Ecken D, A, B, C von den Seitenflächen der Pyramide $D'A'B'C'$ (§. 43.) gleich

$d : \mathfrak{R}$, $a : 2\mathfrak{R}$, $b : 2\mathfrak{R}$, $c : 2\mathfrak{R}$ von der Ebene $A'B'C'$,
$d : 2\mathfrak{R}'$, $a : \mathfrak{R}'$, $b : 2\mathfrak{R}'$, $c : 2\mathfrak{R}'$ " " " $D'B'C'$,
$d : 2\mathfrak{R}''$, $a : 2\mathfrak{R}''$, $b : \mathfrak{R}''$, $c : 2\mathfrak{R}''$ " " " $D'A'C'$,
$d : 2\mathfrak{R}'''$, $a : 2\mathfrak{R}'''$, $b : 2\mathfrak{R}'''$, $c : \mathfrak{R}'''$ " " " $D'A'B'$.

Sind q, q', q'', q''' die Abstände des Durchschnittspunktes O von den Seitenflächen $A'B'C'$, $D'B'C'$, $D'A'C'$, $D'A'B'$ der Pyramide $D'A'B'C'$, so ist

$$2q\mathfrak{R} = 2q'\mathfrak{R}' = 2q''\mathfrak{R}'' = 2q'''\mathfrak{R}''' = k - R^2 = Rr.$$

Die Abstände des Mittelpunkts U von den Seitenflächen der Pyramide $D'A'B'C'$ seien l, l', l'', l''', so ist

$$4l\mathfrak{R} + 3d = 4l'\mathfrak{R}' + 3a = 4l''\mathfrak{R}'' + 3b = 4l'''\mathfrak{R}''' + 3c = 2(k + R^2),$$

ferner

$$l\mathfrak{R} + l'\mathfrak{R}' + l''\mathfrak{R}'' + l'''\mathfrak{R}''' = 2R^2 - k,$$

und

$$\mathfrak{R}(l + \mathfrak{R}) = \mathfrak{R}'(l' + \mathfrak{R}') = \mathfrak{R}''(l'' + \mathfrak{R}'') = \mathfrak{R}'''(l''' + \mathfrak{R}''') = \tfrac{1}{4}(3R^2 + 5k).$$

Die Abstände des Schwerpunkts Q von den Seitenflächen der Pyramide $D'A'B'C'$ seien i, i', i'', i''', so ist

$$8\mathfrak{R}i + 3d = 8\mathfrak{R}'i' + 3a = 8\mathfrak{R}''i'' + 3b = 8\mathfrak{R}'''i''' + 3c = 4k,$$

und

$$\mathfrak{R}i + \mathfrak{R}'i' + \mathfrak{R}''i'' + \mathfrak{R}'''i''' = \tfrac{1}{2}k.$$

Die Abstände der Fußpunkte D', A', B', C' von den gegenüberliegenden Ebenen F'G'H', F'GH, G'FH, H'FG sind gleich

$$zuw : R, \; zu'w' : R, \; zu''w'' : R, \; zu'''w''' : R.$$

§. 50.

Die Durchschnittspunkte der geraden Linien D'A', D'B', D'C', B'C', A'C', A'B' mit den gegenüber liegenden Kanten DA, DB, DC, BC, AC, AB liegen alle in einer und der nämlichen Ebene, und zwar je drei derselben in einer geraden Linie. Sie seien $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{F}'$, $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{H}'$; so ist

$$\overline{\mathfrak{F}D}^2 - \overline{\mathfrak{F}A}^2 = d - a, \quad \overline{\mathfrak{F}'B}^2 - \overline{\mathfrak{F}'C}^2 = b - c,$$
$$\overline{\mathfrak{G}D}^2 - \overline{\mathfrak{G}B}^2 = d - b, \quad \overline{\mathfrak{G}'A}^2 - \overline{\mathfrak{G}'C}^2 = a - c,$$
$$\overline{\mathfrak{H}D}^2 - \overline{\mathfrak{H}C}^2 = d - c, \quad \overline{\mathfrak{H}'A}^2 - \overline{\mathfrak{H}'B}^2 = a - b,$$
$$\overline{\mathfrak{F}\mathfrak{F}'}^2 = D\mathfrak{F}' \,.\, A\mathfrak{F}' + B\mathfrak{F} \,.\, C\mathfrak{F} = daf' : (d - a)^2 + bcf : (b - c)^2,$$
$$\overline{\mathfrak{G}\mathfrak{G}'}^2 = D\mathfrak{G}' \,.\, B\mathfrak{G}' + A\mathfrak{G} \,.\, C\mathfrak{G} = dbg' : (d - b)^2 + acg : (a - c)^2,$$
$$\overline{\mathfrak{H}\mathfrak{H}'}^2 = D\mathfrak{G}' \,.\, C\mathfrak{G}' + A\mathfrak{H} \,.\, B\mathfrak{H} = dch' : (d - c)^2 + abh : (a - b)^2.$$

Es sei e der Abstand der Punkte O, Q von einander, so sind die Abstände der Ebene $\mathfrak{F}\mathfrak{F}'\mathfrak{G}\mathfrak{G}'\mathfrak{H}\mathfrak{H}'$ von den Ecken D, A, B, C gleich

$$d : 4e, \quad a : 4e, \quad b : 4e, \quad c : 4e,$$

folglich ihre Summe gleich k : e. Die Abstände jener Ebene von den Punkten O, U, Q aber sind gleich

$$(k - R^2) : e = Rr : e, \quad (k - 2R^2) : 2e, \quad k : 4e.$$

§. 51.

Aus dem Fußpunkte D' seien auf die Ebenen DAB, DAC, DBC die senkrechten geraden Linien D'C'', D'B'', D'A'' gefällt, und durch die Fußpunkte C'', B'', A'' eine Ebene gelegt, deren Abstand vom Punkte D' durch p vorgestellt sei. Eben so verfahre man bei den Fußpunkten A', B', C' und bezeichne die analogen Abstände derselben durch p', p'', p'''; so ist

$$p\mathfrak{R} = uw, \quad p'\mathfrak{R}' = u'w', \quad p''\mathfrak{R}'' = u''w'', \quad p'''\mathfrak{R}''' = u'''w'''.$$

Wenn aber v, v', v'', v''' die Halbmesser der, um die ebenen Dreiecke A'B'C' D'B'C', D'A'C', D'A'B' beschriebenen Kreise bezeichnen; so ist:

$$2v\mathfrak{R} = u \,.\, OD, \quad 2v'\mathfrak{R}' = u' \,.\, OA, \quad 2v''\mathfrak{R}'' = u'' \,.\, OB, \quad 2v'''\mathfrak{R}''' = u''' \,.\, OC,$$

also ist auch

$$p . OD = 2vw, \quad p'.OA = 2v'w', \quad p''OB = 2v''w'', \quad p'''.OC = 2v'''w'''.$$

§. 52.

Die kürzesten Abstände der geraden Linien D'A', D'B', D'C', B'C', A'C', A'B' von den gegenüber liegenden Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC seien a, b, c, a', b', c', und die kürzesten Abstände dieser Kanten von einander d', d'', d'''; so ist

$$aa' : bb' : cc' = d'^2 : d''^2 : d'''^2.$$

§. 53.

Es seien o, i, u, w die Abstände der Ebene ABC von den Ecken L, L', L'', L''' (§. 48); so ist

$$OD' (+iuw + ouw + oiw + oiu) = 2oiuw,$$
$$DD' (-iuw + ouw + oiw + oiu) = 4oiuw,$$
$$DD' (+iuw - ouw + oiw + oiu) = 4oiuwd : a,$$
$$DD' (+iuw + ouw - oiw + oiu) = 4oiuwd : b,$$
$$DD' (+iuw + ouw + oiw - oiu) = 4oiuwd : c.$$

§. 54.

Der analytischen Behandlung dieser besonderen Pyramide dienen folgende Relationen zur Grundlage. Es seien δ, α, β, γ die Inhalte der ebenen Dreiecke ABC, DBC, DAC, DAB, und m, n, p, m', n', p' wieder die Winkel der Ebenen (δ, α) (δ, β) (δ, γ) (β, γ) (α, γ) (α, β); so ist

$$4\delta^2 = ab + ac + bc, \quad 4\alpha^2 = db + dc + bc, \quad 4\beta^2 = da + dc + ac, \quad 4\gamma^2 = da + db + ab,$$

$$4(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2) = ff' + gg' + hh' = 16k - a^2 - b^2 - c^2 - d^2,$$

$$36\Pi^2 = dab + dac + dbc + abc,$$
$$27\Pi^2 = a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + d\delta^2,$$
$$36\Pi^2 R^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2 + d^2\delta^2;$$

$$d^2\delta^2 = 9\Pi^2 (R^2 - k + d),$$
$$a^2\alpha^2 = 9\Pi^2 (R^2 - k + a),$$
$$b^2\beta^2 = 9\Pi^2 (R^2 - k + b),$$
$$c^2\gamma^2 = 9\Pi^2 (R^2 - k + c);$$

$$bc = 4\delta\alpha \cos m, \quad ac = 4\delta\beta \cos n, \quad ab = 4\delta\gamma \cos p,$$
$$da = 4\beta\gamma \cos m', \quad db = 4\alpha\gamma \cos n', \quad dc = 4\alpha\beta \cos p',$$

$$\cos m \cos m' = \cos n \cos n' = \cos p \cos p' = abcd : 16\alpha\beta\gamma\delta = \phi,$$

$$36\Pi^2 (k - R^2) = abcd = 16\alpha\beta\gamma\delta\phi,$$

$$2(da + bc) = gg' + hh' - ff',$$
$$2(db + ac) = ff' + hh' - gg',$$
$$2(dc + ab) = ff' + gg' - hh',$$

$$f'g'h' = 36\Pi^2 + 4kd^2, \quad f\,g\,h = 16k\delta^2 - 36\Pi^2,$$
$$f'g\,h = 36\Pi^2 + 4ka^2, \quad f\,g'h' = 16k\alpha^2 - 36\Pi^2,$$
$$f\,g'h = 36\Pi^2 + 4kb^2, \quad f'g\,h' = 16k\beta^2 - 36\Pi^2,$$
$$f\,g\,h' = 36\Pi^2 + 4kc^2, \quad f'g'h = 16k\gamma^2 - 36\Pi^2;$$

$$64k^3 = f'g'h' + f'gh + fg'h + fgh' + fgh + fg'h' + f'gh' + f'g'h,$$

$$144\Pi^2 k = ff'gg' - (dc - ab)^2$$
$$= ff'hh' - (db - ac)^2$$
$$= gg'hh' - (da - bc)^2,$$

$$4\alpha(\alpha - \delta \cos m) = df, \quad 4\beta(\beta - \delta \cos n) = dg, \quad 4\gamma(\gamma - \delta \cos p) = dh,$$
$$4\delta(\delta - \alpha \cos m) = af, \quad 4\beta(\beta - \alpha \cos p') = ah', \quad 4\gamma(\gamma - \alpha \cos n') = ag',$$
$$4\delta(\delta - \beta \cos n) = bg, \quad 4\alpha(\alpha - \beta \cos p') = bh', \quad 4\gamma(\gamma - \beta \cos m') = bf',$$
$$4\delta(\delta - \gamma \cos p) = ch, \quad 4\alpha(\alpha - \gamma \cos n') = cg', \quad 4\beta(\beta - \gamma \cos m') = cf';$$

$$2(\delta^2 + \alpha^2 - \beta^2 - \gamma^2) = bc - da, \quad 2(\delta^2 + \beta^2 - \alpha^2 - \gamma^2) = ac - db, \quad (\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2) = ab - dc,$$

$$2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \delta^2) = d(4k - d), \quad 2(\delta^2 + \beta^2 + \gamma^2 - \alpha^2) = a(4k - a),$$
$$2(\delta^2 + \alpha^2 + \gamma^2 - \beta^2) = b(4k - b), \quad 2(\delta^2 + \alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2) = c(4k - c);$$

$$4(b\beta^2 + c\gamma^2 - a\alpha^2) = bc(2d + a), \quad 4(b\beta^2 + c\gamma^2 - d\delta^2) = bc(2a + d),$$
$$4(a\alpha^2 + c\gamma^2 - b\beta^2) = ac(2d + b), \quad 4(d\delta^2 + c\gamma^2 - b\beta^2) = dc(2a + b),$$
$$4(a\alpha^2 + b\beta^2 - c\gamma^2) = ab(2d + c), \quad 4(d\delta^2 + b\beta^2 - c\gamma^2) = db(2a + c),$$
$$4(a\alpha^2 + c\gamma^2 - d\delta^2) = ac(2b + d), \quad 4(a\alpha^2 + b\beta^2 - d\delta^2) = ab(2c + d),$$
$$4(d\delta^2 + c\gamma^2 - a\alpha^2) = dc(2b + a), \quad 4(d\delta^2 + b\beta^2 - a\alpha^2) = db(2c + a),$$
$$4(d\delta^2 + a\alpha^2 - c\gamma^2) = da(2b + c), \quad 4(d\delta^2 + a\alpha^2 - b\beta^2) = da(2c + b);$$

$$4(a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) = 72\Pi^2 + abc,$$
$$4(d\delta^2 + b\beta^2 + c\gamma^2) = 72\Pi^2 + dbc,$$
$$4(d\delta^2 + a\alpha^2 + c\gamma^2) = 72\Pi^2 + dac,$$
$$4(d\delta^2 + a\alpha^2 + b\beta^2) = 72\Pi^2 + dab;$$

$$4(d\delta^2 - a\alpha^2) = bc(d - a), \quad 4(d\delta^2 - b\beta^2) = ac(d - b), \quad 4(d\delta^2 - c\gamma^2) = ab(d - c),$$
$$4(b\beta^2 - c\gamma^2) = da(b - c), \quad 4(a\alpha^2 - c\gamma^2) = db(a - c), \quad 4(a\alpha^2 - b\beta^2) = dc(a - b),$$

$$4(d\delta^2 + a\alpha^2) = 2daf + bcf', \quad 4(d\delta^2 + b\beta^2) = 2dbg + acg', \quad 4(d\delta^2 + c\gamma^2) = 2dch + abh',$$
$$4(b\beta^2 + c\gamma^2) = 2bcf' + daf, \quad 4(a\alpha^2 + c\gamma^2) = 2acg' + dbg, \quad 4(a\alpha^2 + b\beta^2) = 2abh' + dch;$$

$$4(\delta^2 + \alpha^2 - 2\delta\alpha \cos m) = 4(\beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cos m') = ff',$$
$$4(\delta^2 + \beta^2 - 2\delta\beta \cos n) = 4(\alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma \cos n') = gg',$$
$$4(\delta^2 + \gamma^2 - 2\delta\gamma \cos p) = 4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos p') = hh',$$
$$972\Pi^4 = 4(a^2\alpha^4 + b^2\beta^4 + c^2\gamma^4 + d^2\delta^4) + abcd\,(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2),$$
$$(3\Pi)^4\,(7R^2 - 3k) = a^3\alpha^4 + b^3\beta^4 + c^3\gamma^4 + d^3\delta^4,$$
$$36\Pi^2 f = 16\delta^2\alpha^2 - b^2c^2, \quad 36\Pi^2 f' = 16\beta^2\gamma^2 - d^2a^2,$$
$$36\Pi^2 g = 16\delta^2\beta^2 - a^2c^2, \quad 36\Pi^2 g' = 16\alpha^2\gamma^2 - d^2b^2,$$
$$36\Pi^2 h = 16\delta^2\gamma^2 - a^2b^2, \quad 36\Pi^2 h' = 16\alpha^2\beta^2 - d^2c^2,$$
$$a^2f + b^2g + c^2h = bcf + acg + abh,$$
$$d^2f + b^2h' + c^2g' = bcf + dch' + dbg',$$
$$d^2g + a^2h' + c^2f' = acg + dch' + daf',$$
$$d^2h + a^2g' + b^2f' = abh + dbg' + daf',$$

Man seze

$$dbc + dac + dab - abc = 4d\delta^2 - abc = 36\Pi^2 - 2abc = \mathfrak{D},$$
$$abc + dac + dab - dbc = 4a\alpha^2 - dbc = 36\Pi^2 - 2dbc = \mathfrak{A},$$
$$abc + dbc + dab - dac = 4b\beta^2 - dac = 36\Pi^2 - 2dac = \mathfrak{B},$$
$$abc + dbc + dac - dab = 4c\gamma^2 - dab = 36\Pi^2 - 2dab = \mathfrak{C};$$

so ist

$$dab + dac - dbc - abc = daf - bcf' = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{A} - \mathfrak{B} - \mathfrak{C}),$$
$$dab + dbc - dac - abc = dbg - acg' = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{B} - \mathfrak{A} - \mathfrak{C}),$$
$$dac + dbc - dab - abc = dch - abh' = \tfrac{1}{2}(\mathfrak{D} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} - \mathfrak{B});$$

ferner

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{D} = 4abc = 16(9\Pi^2 - 4d\delta^2),$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} - \mathfrak{A} = 4dbc = 16(9\Pi^2 - 4a\alpha^2),$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{A} + \mathfrak{C} - \mathfrak{B} = 4dac = 16(9\Pi^2 - 4b\beta^2),$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{A} + \mathfrak{B} - \mathfrak{C} = 4dab = 16(9\Pi^2 - 4c\gamma^2);$$

$$\mathfrak{D} + \mathfrak{A} = 2daf,\ \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = 2bcf',\ \mathfrak{D} - \mathfrak{A} = 2bc(d - a),\ \mathfrak{B} - \mathfrak{C} = 2da(b - c),$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{B} = 2dbg,\ \mathfrak{A} + \mathfrak{C} = 2acg',\ \mathfrak{D} - \mathfrak{B} = 2ac(d - b),\ \mathfrak{A} - \mathfrak{C} = 2db(a - c),$$
$$\mathfrak{D} + \mathfrak{C} = 2dch,\ \mathfrak{A} + \mathfrak{B} = 2abh',\ \mathfrak{D} - \mathfrak{C} = 2ab(d - c),\ \mathfrak{A} - \mathfrak{B} = 2dc(a - b),$$

$$d\mathfrak{D} - a\mathfrak{A} = 36\Pi^2\,(d - a),\quad b\mathfrak{B} - c\mathfrak{C} = 36\Pi^2\,(b - c),$$
$$d\mathfrak{D} - b\mathfrak{B} = 36\Pi^2\,(d - b),\quad a\mathfrak{A} - c\mathfrak{C} = 36\Pi^2\,(a - c),$$
$$d\mathfrak{D} - c\mathfrak{C} = 36\Pi^2\,(d - c),\quad a\mathfrak{A} - b\mathfrak{B} = 36\Pi^2\,(a - b).$$

Nachtrag

Nach Vollendung des Druckes bemerkte der Verfasser noch folgende Fehler:

Seite		Zeile			Berichtigung
Seite 3	Zeile	9 v. o.	lies		bilder statt bilden.
„ 4	„	15 v. u.	„		$(1 + n^2 + p^2)$ statt $1 + n^2 + p^2$.
„ 5	„	15 v. u.	„		dreieckigen vor Pyramide.
„ 6	„	2 v. o.	„		der vor α.
„ 6	„	11 v. o.	„		benützt statt benutzt.
„ 7	„	11 v. o.	„		a_ε statt $\alpha\varepsilon$.
„ 7	„	16 v. u.	„		BCD, nach Ebenen.
„ 7	„	2 v. u.	„		coordinirten statt cooдinirten.
„ 9	„	13 v. o.	„		f statt f'.
„ 10	„	10 v. u.	„		hg' statt gh'.
„ 10	„	1 v. u.	ist der Dividend durch den dreifachen Inhalt der Pyramide DABC zu multipliciren.		
„ 13	„	7 v. u.	lies		f statt f'.
„ 14	„	11 v. o.	„		$+ (2d \mp 1)$ statt $(2d - 1)$.
„ 14	„	14 v. o.	„		acg) statt acg.
„ 15	„	8 v. u.	„		f statt f'.
„ 15	„	7 v. u.	„		f statt f', und g statt g'.
„ 15	„	2 v. u.	„		f statt f'.
„ 16	„	2 v. o.	„		a statt b.
„ 16	„	10 v. o.	„		$(b + b)$ statt $b + b$.
„ 19	„	13 v. u.	„		g statt g'.
„ 24	„	18 v. u.	„		$a^2A^2 + b^2B^2 + c^2C^2 + d^2D^2 - 9\Pi^2$ statt $3(a^2A^2 \ldots)$.
„ 24	„	6 v. u.	„		$4NV^2$ statt $2NV^2$.
„ 24	„	3 v. u.	„		$18m\Pi^2 - M$ statt $2(18m\Pi^2 - M)$.
„ 26	„	5 v. o.	„		Geraden statt geraden.
„ 28	„	7 v. u.	„		F'G'H' statt F'G'H.

Seite 28 Zeile 2 v. u. lies $1 - 2d : 2d$, $1 - 2a : 2a$, $1 - 2b : 2b$, $1 - 2c : 2c$ statt $1 : 2d$ rc.

" 31 " 16 v. u. " h' statt h.

" 33 " 8 v. o. " (§. 29) statt (E. 3.)

" 34 " 19 v. u. " §. 33 statt §. 31.

" 47 " 17 v. u. " $2(\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)$ statt $(\delta^2 + \gamma^2 - \alpha^2 - \beta^2)$.

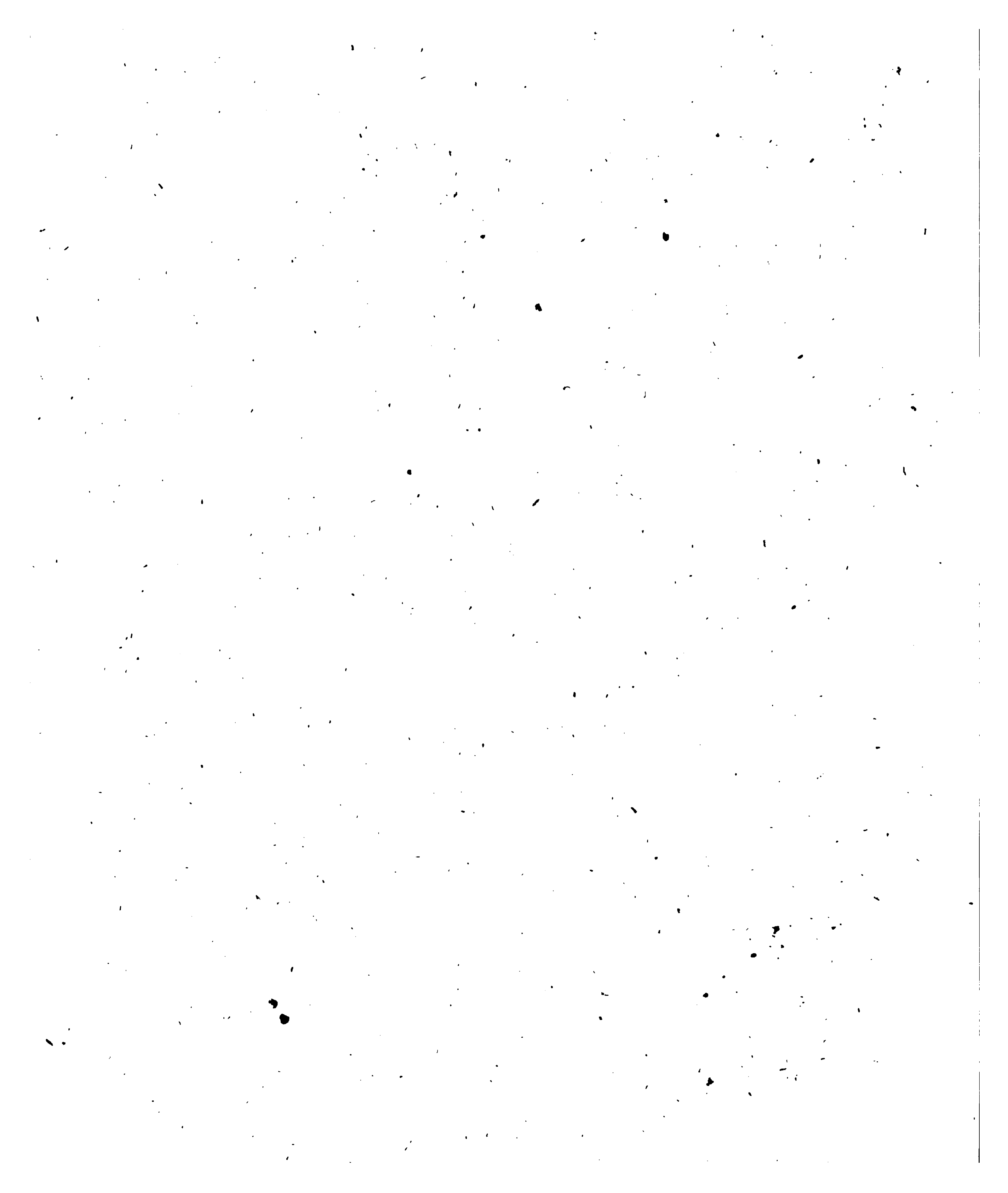
Zu §. 23 seze man noch Folgendes hinzu: Es seien die, den Ebenen F′G′H′, F′GH, G′FH, H′FG gegenüber liegenden, Ecken der, von eben diesen Ebenen eingeschlossenen, dreieckigen Pyramide L, L′, L″, L‴; so schneiden die Kanten L″L‴, L′L‴, L′L″, LL′, LL″, LL‴ die gegenüber liegenden Kanten BC, AC, AB, DA, DB, DC, und zwar in einer und der nämlichen Ebene. Auch schneiden die geraden Linien FA, GB, HC einander im Durchschnittspunkte der geraden Linie JD mit der Ebene ABC, und die geraden Linien L′F′, L″G′, L‴H′ schneiden einander im Durchschnittspunkt der geraden Linie JD mit der Ebene F′G′H′. Das Nämliche gilt von den geraden Linien DF, BH′, CG′; LF′, L″H, L‴G, u. d. gl. Der Inhalt der dreieckigen Pyramide, welche die vier Durchschnittspunkte der geraden Linien JD JA, JB, JC mit den Ebenen F′G′H′, F′GH, G′FH, H′FG bestimmen, ist gleich

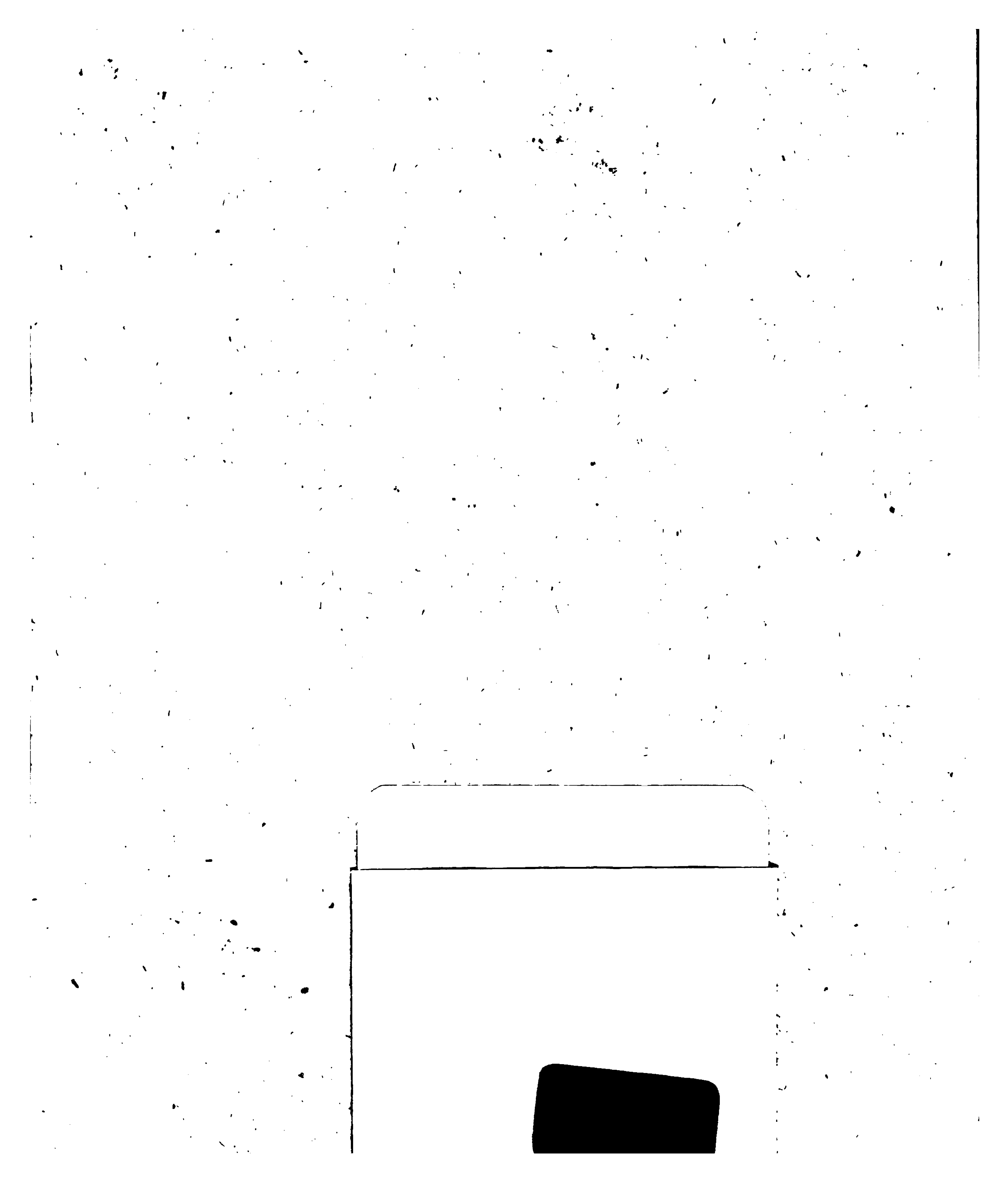
$$48abcd\Pi : (1 + 2a)(1 + 2b)(1 + 2c)(1 + 2d).$$

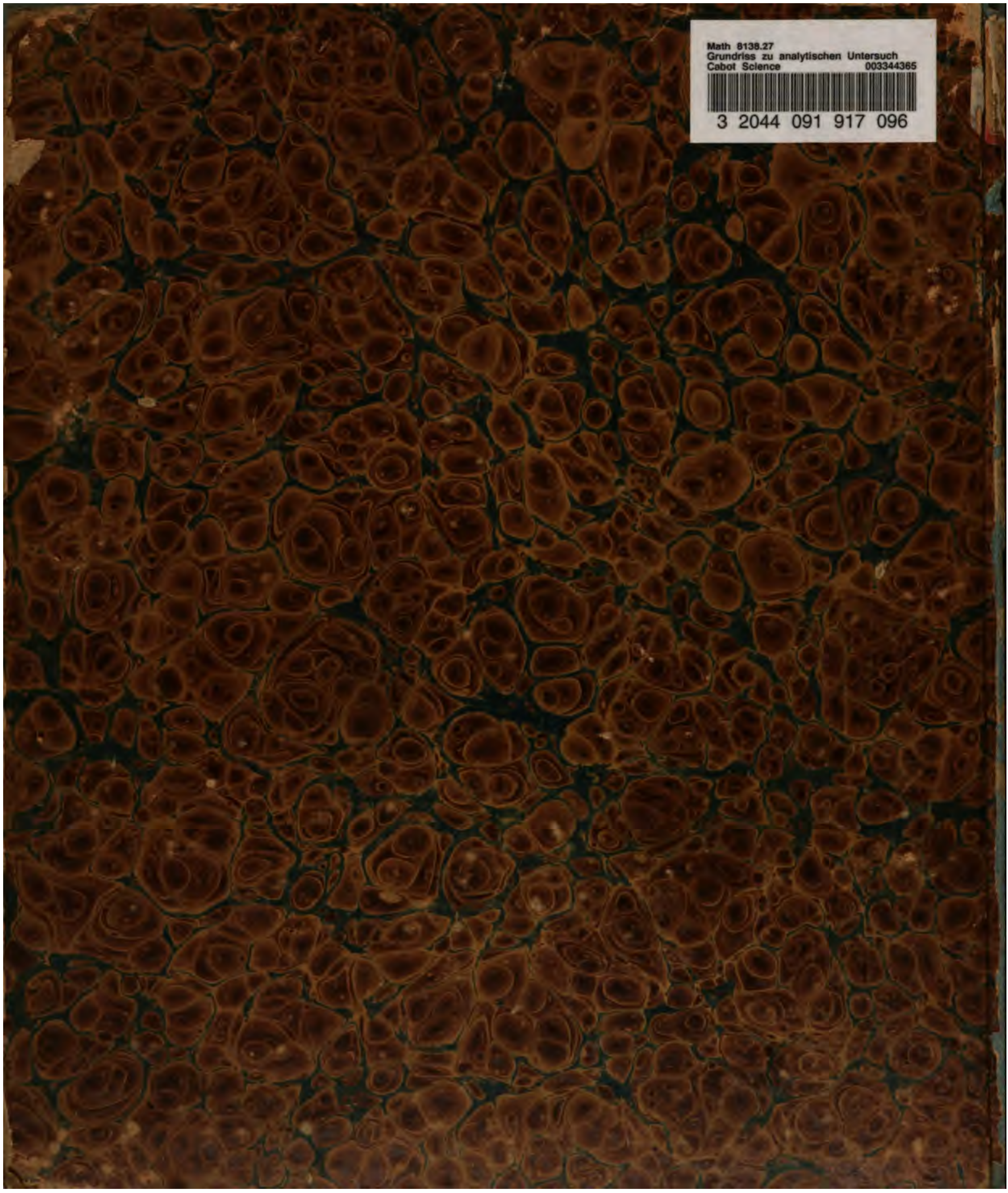
Am Ende des §. 30 seze man noch hinzu: woher folgt:

$$\begin{aligned} 0 &= \sin\alpha . \sqrt{f} + \sin\beta . \sqrt{g} + \sin\gamma . \sqrt{h} \\ &= \sin\alpha . \sqrt{f} - \sin\beta' . \sqrt{g'} - \sin\gamma' . \sqrt{h'} \\ &= \sin\beta . \sqrt{g} - \sin\alpha' . \sqrt{f'} + \sin\gamma' . \sqrt{h'} \\ &= \sin\gamma . \sqrt{h} + \sin\alpha' . \sqrt{f'} + \sin\beta' . \sqrt{g'}. \end{aligned}$$








Math 8138.27
Grundriss zu analytischen Untersuch
Cabot Science 003344365
3 2044 091 917 096